論　　説

「数直線でかけ算」指導の非明証性の構造
―― ＜数は量の比＞の数学との対照から *

宮　下　英　明 **

要　約

分数・小数のかけ算・わり算指導は，今日「*数直線*」を用いる方法が顕著である。しかし，この内容は，(1) 内包される数学の過剰と (2) ＜数は量の抽象＞の立場からの数学の非在が合わさるものになっていて，明証を求めると無理がでてくる。そこで，明証への到達を＜できる・わかる＞のことにしている者は，＜できない・わからない＞者になってしまう。生徒・教師が＜できない・わからない＞を誤って判断しないために，「数直線でかけ算・わり算」の非明証性の構造を共通理解のものにする必要がある。

非明証性の構造は，内包される数学ないし非数学を同定し，これを数学の明証的な形と対比することで，示される。本論考は，＜数は量の比＞からの構成的方法を「数学の明証的な形」と定めて，これを行う。

キーワード：かけ算，数直線，数学，量の比，量の抽象

1．はじめに

算数・数学科は内容が明証的であると思われやすい。この通りであれば，理に則って考えられることが算数・数学の＜できる・わかる＞になる。理に則って考えることの失敗は，自分のせいだとなる。自分のせいにする者は，さらに自分を＜できない・わからない＞者に定めるかも知れない。

算数・数学科の内容は決して明証的ではない。理に則って考えることの失敗は，内容のもともとの非明証性に因る場合もある。

教育では，非明証は明証に改まるのがよいのではない。実際，教育場面での非明証には，だいたいの場合，理が認められる。肝心なのは，＜できる・わかる＞を誤解しないために，非明証の捉えがきちんとできていることである。

分数・小数のかけ算・わり算は，立式・計算の説明がわからないものになる。今日「*数直線*」を説明に用いる方法が顕著であるが，この説明もやはりわからないものになる。そしてこの＜わからない＞は，内容の非明証性に溯行する場合である。

本論考は，「*数直線で分数・小数のかけ算・わり算*」の非明証性が実際どのようであるかを，論じようとするものである。趣旨は，授業者が自分および生徒の＜できない・わからない＞を誤って判断してしまわないようにすることにある。

非明証性を見る方法は，明証的な「かけ算・わり算」との対照･対比である。明証的な「かけ算･わり算」はどこにあるかというと，数学にある。そこで，つぎが方法である：

> 学校数学の「*数直線で分数・小数のかけ算・わり算*」が内包する数学・非数学を同定し，これと「分数・小数のかけ算・わり算」の数学を対比する。

本論考は，＜数は量の比＞からの構成的方法を「数学」と定める (宮下, 2011)。そして上に述べた対比を行う。ただし，「*数直線で分数・小数のかけ算・わり算*」のうち「小数」と「わり算」を割

* 平成 24 年 4 月 11 日受付，平成 24 年 6 月 11 日決定
** 北海道教育大学教授

愛する。紙幅の都合が理由であるが，本論考の趣意もこれによって損なわれることはない。

また，本論考は，論点を拡散させないために，＜数学との対比＞のみを行う。「*数直線でかけ算・わり算*」の出自・沿革および現状況 (学習指導要領・教科書の内容等) には , 触れない。

2. 「×」の数学

はじめに,「*数直線で分数のかけ算*」の非明証性に対比するところの，数学の「分数のかけ算」を示す。取り上げる内容は，必要最小限にとどめる。すなわち, 数学の「×」と「分数倍」について，それぞれの図式の押さえをする。

(1)「数」の意味――＜数は量の比＞

数の出自は量表現 / 量計算である。この出自がそのまま「数」の数学へと整えられる。この「数」は ,＜量の比＞ないし＜量の倍作用＞である (図 1):

$$量_a \xrightarrow{数} 量_b$$

図 1

「2/3 dL」は量 dL の 2/3 倍のことである。「1 dL」は dL の 1 倍のことであり，dL と同じである。「何 dL」と問うときの「何」は数であり,「何 dL」は dL の「何」倍のことである。

(2) 記号「×」の文法

数の積は,「倍の合成」になるように定義される。すなわち, つぎ (図 2) のように用いるものである:

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$$

図 2

本論考は，倍の図式を随所で用いていくことになる。ところで，倍の関係を示す目的では，量の表記は実質機能しないふうになる。そこでこのような場合，量の表記を「・」で代用したつぎのような表現 (図 3) を，適宜用いることにする：

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & \cdot \arrow[r, "n"] & \cdot \end{tikzcd}$$

図 3

(3)「分数」の数学

分数は,「任意の自然数 n に対して＜ n 等分＞が可能な量」の概念をつくるとき，この量の比としてつくられる数である。

二つの量 a , b における「 a の 3/4 倍が b 」の意味は,「 a と b を共約する量で，これの 4 倍と 3 倍がそれぞれ a と b になるものが存在する」である。そこで，つぎが「3/4 倍」の図式 (図 4) になる：

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl, "4"'] \arrow[dr, "3"] & \\ \bullet \arrow[rr, "\frac{3}{4}"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

図 4

3. 「*数直線で分数のかけ算*」が内包する数学

この章では,「*数直線で分数のかけ算*」が内包する数学を同定する。これによって示されてくるものは，数学の過剰と非在である。

(1) 「 1 と見る」「 1 あたり量」が内包する数学

学校数学に「 1 と見る」という表現がある。「重さ 2 g を 1 と見る」のように言う。また，この「 1 と見る」と同じ意味のことばに,「 1 あたり量」がある。「 2 g を 1 と見る」は，「 2 g を 1 あたり量とする」に言い換えられる。

「 1 と見る」「 1 あたり量」の「 1 」は，＜量としての数＞の 1 である。「 1 と見る」「 1 あたり量」の数学を押さえるためには，＜量としての数＞の理解が必要になる。(宮下, 2011))

①　量の代数的構造

最初に, 用語の準備をする。「重さ」と言うとき, 個々の重さを指す場合と，カテゴリーとしての重さを指す場合の，二通りがある。これを区別するために, 前者を「重さ(要素)」, 後者を「重さ(系)」と言い表す。また，重さ，長さ，時間等々の量の一般名称として「量」のことばを使うときは,「量(要素)」「量(系)」の言い回しを用いる。

数学は，量(系) を＜構造をもった集合＞と捉える。この集合の要素が，量(要素) である。

量(系) は，つぎの内容で数を構成要素にしている :《量(要素) に対する数の倍作用が定義される》

「数」にも, 自然数, 分数, 正負の数, 複素数等, いろいろある。(「正負の数」のことばは,「整数」「有理数」の両義で用いる。「分数」は「正の有理数」である。）そして，たとえば「分数」と言うとき,

個々の分数を指す場合と，カテゴリーとしての分数を指す場合の，二通りがある。これを区別するために，前者を「分数(要素)」，後者を「分数(系)」と言い表す。また，自然数，分数，正負の数，複素数等々の数の一般名称として「数」のことばを使うときは，「数(要素)」「数(系)」の言い回しを用いる。

量(系) は，つぎのように表される：

$$((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$$

1. Qは，量(要素) 全体の集合。
2. Q の 2 つの要素 $\mathbf{q}_1$ と $\mathbf{q}_2$ に対しては，これの和 $\mathbf{q}_1 \boldsymbol{+} \mathbf{q}_2$ が定義される。(「$\boldsymbol{+}$」は太字の＋)
3. (N, ＋, ×) は，数(系)。
4. Q の要素 $\mathbf{q}$ と N の要素 n に対しては，$\mathbf{q}$ の n 倍 $\mathbf{q} {}_{\times} n$ が定義される。(「${}_{\times}$」は下付の ×)
5. $\boldsymbol{+}$，${}_{\times}$，＋，× の間には，つぎの関係が成り立つ (これが数の＋と × を定める条件):

$$\mathbf{q} {}_{\times} n_1 \boldsymbol{+} \mathbf{q} {}_{\times} n_2 = \mathbf{q} {}_{\times} (n_1 + n_2)$$
$$(\mathbf{q} {}_{\times} n_1) {}_{\times} n_2 = \mathbf{q} {}_{\times} (n_1 \times n_2)$$

② ＜量としての数＞――量の普遍対象

量 $((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ は，数 (N, ＋, ×) によって，構造が定まる。すなわち，構成要素の数が同じである量は，構造が同じ (同型) である。――例えば，数の倍を分数倍で考えている長さと重さは，同型である。数の倍を自然数倍で考えている長さと分数倍で考えている重さは，同型でない。

以下，量の構造が構成要素の数によって定まるしくみを示す。

数 (N, ＋, ×) を素材にして，組

$$((N, +), \times, (N, +, \times))$$

をつくる。これは，量(系) の構造をもつものになる――すなわち，＜量としての数＞になる：

1. (N, ＋) の要素が，量(要素)
2. (N, ＋, ×) の要素が，数(要素)
3. 間にある × が，量に対する数の倍作用

そして，Q の零でない任意の要素 $\mathbf{u}$ をもとにしてつくられる対応：

$$f : \mathbf{u} {}_{\times} n \longmapsto n \quad (n \in N)$$

が，$((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ と ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の間の同型対応になる。

このように，((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は，N の要素を倍の作用素として考えるすべての量 $((Q, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ にとって，自身の構造を示すものになっている。このことは，数学の「普遍対象 (universal object)」のことばを用いて，つぎのように表現される：

((N, ＋), ×, (N, ＋ ,×)) は，N の要素を倍の作用素として考える量の普遍対象。

③「1 と見る」「1 あたり量」の数学

以上を準備として，いま「1 と見る」「1 あたり量」の数学を，簡明に述べることができる。

例えば「2/5 g を 1 と見る」「2/5 g を 1 あたり量とする」は，つぎの意味になる：

(N, ＋, ×) を，分数(系) とする。
重さ(系) $((Q_{重さ}, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ と＜量としての数＞((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の間の同型で，2/5 g に 1 が対応するものを立てる。 ――これは，つぎの対応になる：

$$(g {}_{\times} 2/5) {}_{\times} n \longmapsto n \quad (n \in N)$$

(2)「*数直線*」が内包する数学

ここでは「*数直線*」が内包する数学を押さえる。この数学は，「代数的構造としての量の同型」と「量の普遍対象――＜量としての数＞」である。

①「*数直線*」を描く意味

「*数直線*」は，比例関係のグラフ上の数値対応を書き出した格好になっている (図 5)：

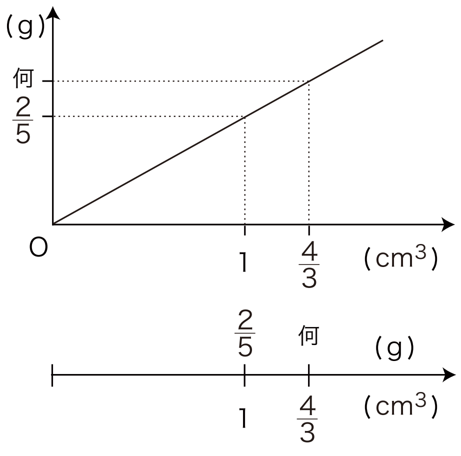


図 5 ：比例関係のグラフから「*数直線*」

比例関係は，0 への定値写像でなければ，量の同型対応になる。同型対応は, 対応する 2 量 (≠ 0) を一組定めれば，全体が決定する。「数直線」を描くとは, 量の同型対応を描くということである。

② 量の軸

「*数直線*」は，自分を「量の軸」と読ませる。体積の単位を添えたら＜体積＞の軸であり，重さの単位を添えたら＜重さ＞の軸である。しかし，現にあるものは，＜長さ＞のものさしである。実際，描かれている目盛りを使って測れる量は，長さである。

では，これが＜体積＞や＜重さ＞の軸であるとは，どういうことか？これの説明は，数学になる。以下，これを確認する。

「＜体積＞の軸」を例にする。「＜体積＞の軸」として描くのは，つぎのもの (図 6) である：

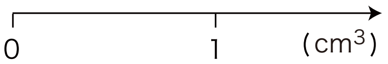


図 6

この軸の上に，例えば「4/3 cm^3」を目盛る場合，それはつぎの手順になる：

1. 0 の点から 1 の点までの距離を求める。
　――これを **u** とする。
2. cm^3 に対する 4/3 cm^3 の比を求める。
　――これは 4/3。
3. 0 からの距離が u の 4/3 倍になる点を，軸上に求める。
　――この点に，「4/3」を目盛る。

さて，これは数学として何をやっているのかというと，＜体積＞と＜長さ＞の間の同型 (両者の量の構造に関する同型) を立てている。

＜体積＞と＜長さ＞を，それぞれ $((Q_{体積}, +), \times, (N, +, \times))$，$((Q_{長さ}, +), \times, (N, +, \times))$ とする。この例では，N は分数である。

＜体積＞と＜長さ＞の同型対応は，つぎの条件を満たす写像 $f : Q_{体積} \to Q_{長さ}$ である：

1. f は，$Q_{体積}$ と $Q_{長さ}$ の間の 1 対 1 対応
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$
　$(x, y \in Q_{体積})$
3. $f(x \times n) = f(x) \times n$
　$(x \in Q_{体積},\ n \in N)$

ここで例にしている＜体積＞の軸では，＜体積＞と＜長さ＞の間の同型対応がつぎのようにつくられている (図 7)：

1. cm^3 に，任意の長さ **u** を対応させる
2. cm^3 $\times$ n に **u** $\times$ n を対応させる ($n \in N$)

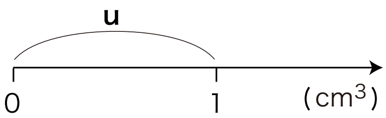


図 7

以上が，「量の軸を描く」の数学である。

③ 同型対応「*数直線*」の構造

量の軸をつくることは，＜長さ＞との間の同型対応をつくることである。そして，「*数直線*」は，＜長さ＞が媒介する二つの同型対応の合成というものになっている。例えば，「*数直線*」(図 8)

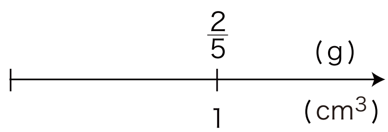


図 8

は，つぎの内容の表現 (図 9) である：

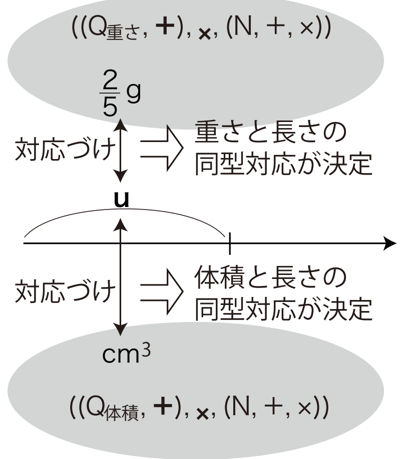


図 9：「*数直線*」が内包する同型対応

2 量の同型対応では，特に＜量としての数＞が一方の側に使われることがある。――「1cm^3 が 2/5 g だと，4/3 cm^3 は何 g ？」の問題が「1 が 2/5 g だと, 4/3 は何 g ？」の問題に替えられ，つぎの「*数直線*」が描かれる (図 10)：

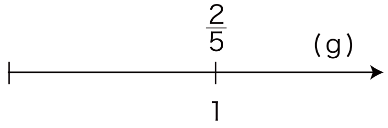


図 10

そしてこれを,「1と見る / 1あたり量」と称しているわけである。

(3)「*数直線でかけ算*」が内包する数学

ここでは,「*数直線でかけ算*」が内包する数学の押さえを行う。既に済ませたつぎの数学の押さえが,これの準備になっている：

1.「1と見る / 1あたり量」が内包する数学
2.「*数直線*」が内包する数学

① 「*数直線でかけ算*」の立式

数の積の立式・計算の指導は,現行では文章題から始める。文章題には,つぎのような比例関係の問題が用いられる：

「1cm^3 が 2/5 g だと,4/3 cm^3 は何 g ？」

この問題に対し,「*数直線*」の図 (図 11) をつぎの手順でつくる：

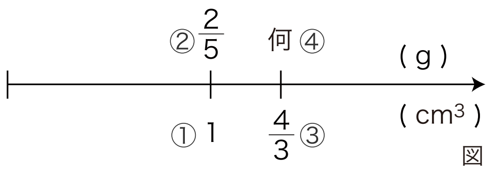


図 11

これは,与えられた文章題の＜体積と重さの比例関係＞の構造をそのまま受け取って作図するやり方であるが,つぎのやり方もある。

すなわち,問題を「1あたり 2/5 g は,4/3 だと何 g ？」のように読む。そして,＜量としての数＞を下辺としたつぎの「*数直線*」(図 12) を描く：

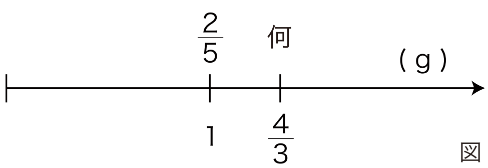


図 12

「*数直線でかけ算*」の立式指導は,この段階で「2/5 × 4/3」の立式に及ぶ。あるいは,倍を書き入れたつぎの図 (図 13) を挿む場合もある：

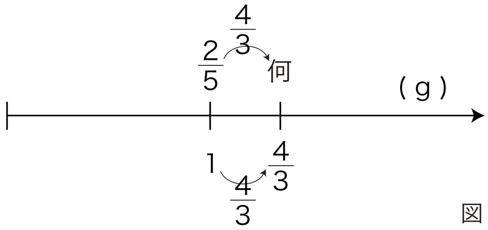


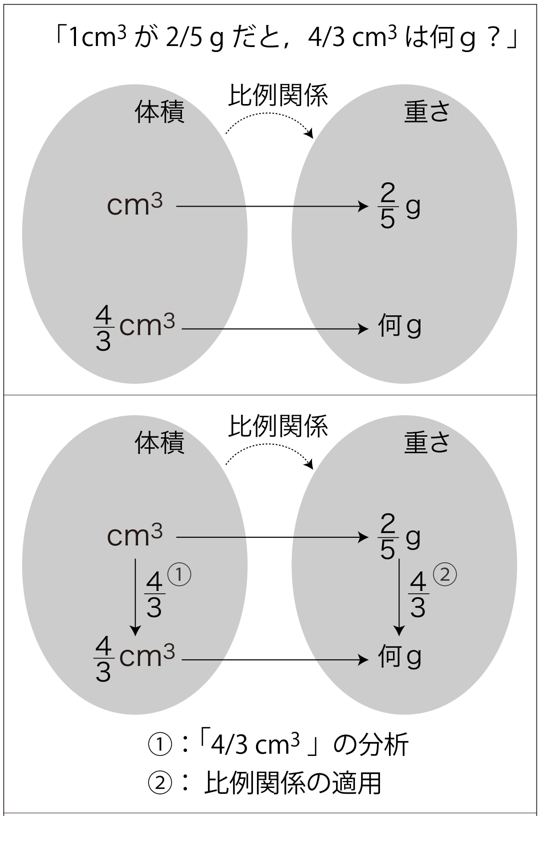
図 13

数学だと,ここはつぎの明証を経て数の積の立式に至るところである：

1. 最初の問題を「2/5 g の 4/3 倍が何 g 」に還元するプロセス
2.「2/5 g の 4/3 倍が何 g 」を「2/5 × 4/3」に還元するプロセス

現行は,1 を明証できない。内容が「比例関係」であり,そして「*数直線*」は「比例関係」を既習としないものになっているからである。また,2 は明証無用になる。数の「×」の意味を「1あたり量 × いくつ分」にしているからである。

数学におけるこのときの数の積の立式の過程 (推論) は,つぎのようになる (表 1)：

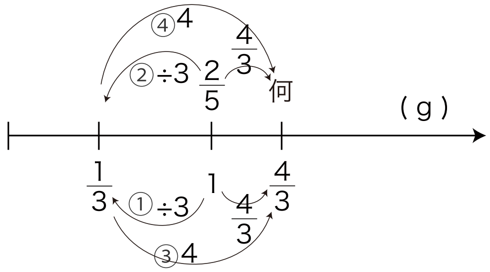


問題の還元：「2/5ｇの 4/3 倍は何ｇ」 $\frac{2}{5}\,\mathrm{g} \xrightarrow{\frac{4}{3}} 何\,\mathrm{g}$
$\mathrm{g} \xrightarrow{①\frac{2}{5}} \frac{2}{5}\,\mathrm{g} \xrightarrow{\frac{4}{3}} 何\,\mathrm{g}$ ① 何 $\overset{}{\underset{②}{=}} \frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$ ①：「2/5 ｇ」「何ｇ」の分析 ②：「×」の文法
問題の還元：「何 ＝ 2/5× 4/3」

表１：「積の立式」の推論

③ 計算の手順

数の積の立式が成ったら，つぎは計算である。現行では，分数の積の計算は「分数 × 整数」「分数 ÷ 整数」が既習になる。例えば「2/5 × 4/3」だと，これを「(2/5 ÷ 3) × 4」に変形し，あとは既習に乗せるというふうになる。立式に用いた数直線の上にこの計算を表すならば，つぎのようになる (図 14)：



$$何 = \frac{2}{5}\times\frac{4}{3} = \frac{2}{5}\div 3\times 4$$

図 14

しかし, これは非数学である。実際, 分数の「×」は, 自然数の「×」と「÷」で定義されるのではない。数学では,「分数 × 整数」「分数 ÷ 整数」は,「分数 × 分数」の後に来る。この内容を改めて確認しておく：

数学では，自然数の「×」と分数の「×」は，それぞれ自然数の内算法，分数の内算法ということで，別物である。

分数の系を立てた上で，自然数の系を分数の系に埋め込む (embedding)。

埋め込みの方法は,《分数 n / 1 を自然数 n と同一視する》である。

自然数が分数と見なせるものになったので, 分数の「×」をはさんで自然数と分数の相並ぶことが可能になる。

併せて,「分数のかけ算」の数学の推論を確認しておく (表 2)：

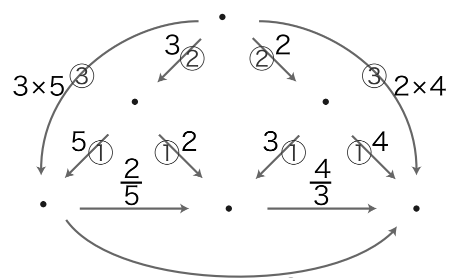
式	2/5 × 4/3
×の文法	$\cdot \xrightarrow{\frac{2}{5}} \cdot \xrightarrow{\frac{4}{3}} \cdot$ $\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}$
推論	 $\frac{2}{5}\times\frac{4}{3} \overset{④}{=} \frac{2\times 4}{5\times 3}$ ①：分数の定義 ②：２量の共約 (「通分」) ③：× の文法 ④：分数の定義

表２：「分数のかけ算」の推論

(4)　記号「×」の意味指導が内包する数学

かけ算の指導は，本来，記号「×」の意味を伝えることから始まる。実際，かけ算の立式・計算は,「×」の意味に則って行うことになる。

「×」の意味指導には,「かたまり × いくつ」と「1 あたり量 × いくつ分」の２タイプが認められる。ここでは，それぞれどんな数学 (実際は，非数学) を行っていることになるのかを，押さえる。

①「かたまり × いくつ」の場合

つぎは「かたまり×いくつ」の図式である (図15)：

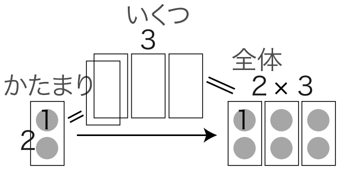


図 15

数を自然数から分数に替えるとき，この図式は，つぎのようになる (図16)：

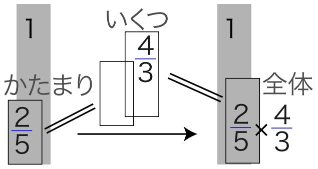


図 16

またこのときは「かたまり」の表現では通じなくなるので,「1 あたり量」の表現が使われてくる (図17)：

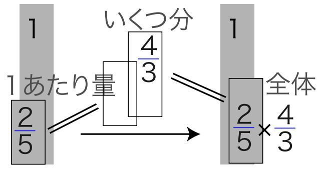


図 17

これらの図式は，「かたまり」「いくつ」それぞれにおいて，《もとにする量とそれに対する比を合わせて一つの絵にする》をしている。なぜこのような絵にするのか？「数の積は量の積の抽象」を立場にしているから, ということになる。――「数の積は量の積の抽象」については，4.(2). ①で論じる。

数学は,「数の積は倍の合成」である。積の図式は，もとにする量とそれに対する比 (倍) が別の対象として描かれる (図18)：

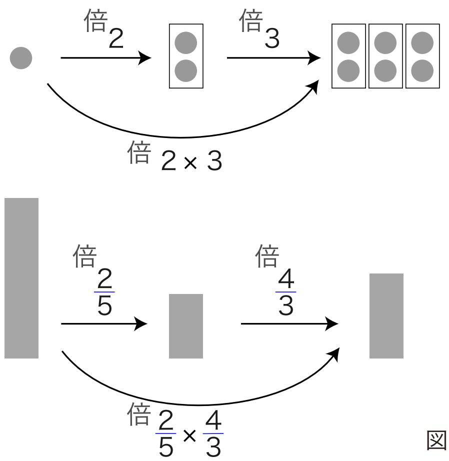


図 18

この数学の図式に見るべきは，理論を構成的に組み上げる方法にはシンプルな図式の実現が対応するということである。翻って，込み入った図になるのは，内容が構成的 / 理論的につくられていないためである。

③「1 あたり量 × いくつ分」の場合
――「＜比例関係＞と＜量＞の複比例」の数学

数の積の意味が子どもに伝えられる形は，一つが「かたまり×いくつ」であり，そしてもう一つが，つぎの「数直線」が説明図式として用いられるところの,「1 あたり量 × いくつ分」である (図19)：

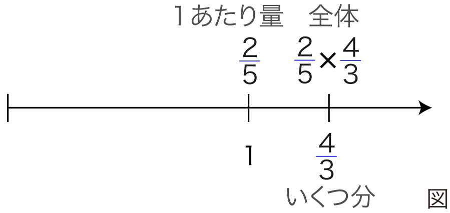


図 19

この「1 あたり量 × いくつ分」も,「数の積は量の積の抽象」の立場である。実際,「内包量と外延量の積」と解される。

「内包量・外延量」の概念を立てる立場では,「速さ」が内包量の例になる。そして,「内包量」が「1 あたり量」と同じものであることは，つぎの図式が示す通りである (図20)：

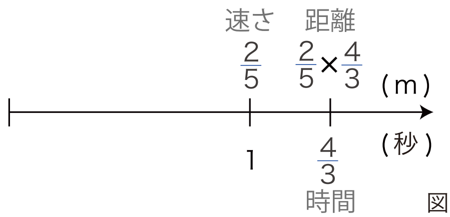


図 20

以下,「1 あたり量 × いくつ分」(「数の積は量の積の抽象」) の数学を示す。

「1 あたり量 × いくつ分」は，比例関係の文章題からの導出になる。「比例関係」は，数学では,「量の構造に関する準同型」ということになる。

いま, 例として, 体積 (($Q_{体積}$, **+**), $_{\times}$, (N, ＋, ×)) と重さ (($Q_{重さ}$, **+**), $_{\times}$, (N, ＋, ×)) を分数係数で考える。

体積と重さの間の比例関係全体の集合を，数学

の表記法にならって，Hom(Q体積 , Q重さ) で表す。この集合から量 ((Hom(Q体積 , Q重さ), ＋), ×, (N, ＋ , ×)) が導かれる。すなわち, ＋ と × を，つぎのように定義する：

1. f, g ∈ Hom(Q体積 , Q重さ) に対し，
   (f ＋ g)(x) ＝ f(x) ＋ g(x)　(x ∈ Q体積)
2. f ∈ Hom(Q体積 , Q重さ)，n ∈ N に対し，
   (f × n)(x) ＝ f(x) × n　(x ∈ Q体積)

こうして，比例関係は量になる。例えば，速度は時間と距離の比例関係であるが，これは量として足したり倍したりできるわけであり，実際，日常的にそうしている。

以上で，「1 あたり量 × いくつ分」の数学を示す準備ができた。「1 あたり量 × いくつ分」は,「×」の意味を，Hom(Q体積 , Q重さ) × Q体積 の Q重さ への写像：

$$(f, \mathbf{x}) \longmapsto f(\mathbf{x})$$
$$(f \in \mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ}),\ \mathbf{x} \in Q_{体積})$$

に定めていることになる。なぜ，ここで「×」の登場になるのか？この写像 (F とする) は，複比例関数になっている。そして，Q体積 と Q重さ の単位を定め，この単位に準じて Hom(Q体積 , Q重さ) の単位を定めるとき，F から導かれる数値の関数：

(体積単位あたり重さの数値，体積の数値)
　$\longmapsto$ 重さの数値

は，２数にその積が対応するものになる。

例えば，体積の単位に cm^3，重さの単位に g をとるときは，$\mathrm{g/cm}^3$ を Hom(Q体積 , Q重さ) の単位にする。このとき，
F($\mathrm{g/cm}^3$ × 2，cm^3 × 3)
＝ ($\mathrm{g/cm}^3$ × 2) (cm^3 × 3)
＝ ($\mathrm{g/cm}^3$) (cm^3) × (2 × 3)
＝ g × (2 × 3)

この結果を見て，「×」を使っているわけである。

このように，「1 あたり量 × いくつ分」における数の積の立式は，これを数学にすると，「F(f, x) に対する数の積の立式」ということになる。尤も，「数の積は量の積の抽象」の立場では，数の積の立式は直接的であり，式の導出の明証は無用のものになる。実際,「抽象」を謂う所以である。「抽象」は,「存在の事実の捉えとこれの記述」であるから，明証するというものではないわけである。

4.「*数直線でかけ算*」の＜非明証性＞の要素・内容

ここまで，「*数直線でかけ算*」が内包する数学と非数学を押さえてきた。そしてこの内容が,「*数直線でかけ算*」の非明証性の説明になる。すなわち，数学の過剰がある一方で数学の非在があるというのが，非明証性の構造である。

ここで数学の過剰をつくっているものは，＜数は量の比＞を択らないとする立場である。数学の非在をつくっているものは，＜数は量の抽象＞の立場である。

(1)　数学の過剰――＜数は量の比＞迂回の様態

①「*数直線*」が数学の過剰に

学校数学は，数学の＜数は量の比＞を択らないことを立場にしている。択るのみであるものを択らないので，無理・余計をやってしまうことになる。「*数直線*」は，この余計のものの一つである。

「*数直線*」は，２量の同型対応であって，視覚化した＜長さ＞との同型を間に挿む形のものである。上下辺での要素の配置を,比を視覚化しつつ，線型に配置する。この《＜長さ＞との同型を間に挿む》は，無用なプロセスである。同時に，高度な内容の数学の使用である。

また，「*数直線で分数のかけ算*」の数学は，分数の代数構造――特に「かけ算」――を要素にしている。したがって，「*数直線*」を使って「分数のかけ算」の式を導き，計算法を導くことは，数学においては循環論法（《既に系の要素になっているものを，系を用いてつくりだす》）になる。

学校数学の「*数直線で分数のかけ算*」が内包する数学は，分数のかけ算の本来の数学に対し,「無用」「循環論法」「内容が数学的に高度」の意味で，過剰である。そしてこの「数学が過剰」が，「*数直線で分数のかけ算*」の＜非明証性＞の内容の一つになる。実際,「無用」「循環論法」であるから，明証を求めるとおかしなことになる。「内容が数学的に高度」であるから，この数学は明示できるものにならない――暗黙に・感覚的に扱うことに

なる。

「*数直線*」は，専ら指導的方便として合理化されるものである。この捉えが肝心である。

②「１と見る」が数学の過剰に

「*数直線*」では，＜量としての数＞が下辺の量に使われることがある。この「*数直線*」が，「１と見る」「１あたり量」のことばの場面になるものである。

「*数直線*」における数学の過剰は，下辺が＜量としての数＞の「*数直線*」の場合，「下辺の無用」を加えるものになる。実際，「*数直線*」(図21)：

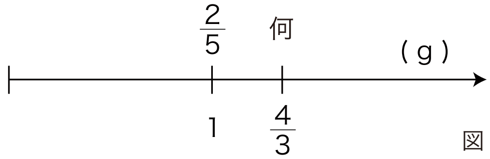


図 21

は，「2/5 ｇの 4/3 倍は何ｇ」の表現であり，そして，「2/5 ｇの 4/3 倍は何ｇ」を「数直線」に表すことは，数学として空回りするプロセスになる。

この「*数直線*」の指導的意義は，一つに「２つの重さの相対的位置関係が，２つの長さの相対的位置関係として理解される」である。ただし，この内容は，同型の数学であるから，明証的に扱えるものにはならない。

指導的意義のもう一つは，指導的方便として非数学を行うというものである。分数倍を「÷整数×整数」の非数学に替える操作が，「*数直線*」の上で演じられる (3,(3), ③)。

(2)　数学の非在──＜数は量の抽象＞の立場

「*数直線*」と数の積の立式の間には，量の単位を外すプロセス (推論) がある。学校数学は,「*数直線*」から直ちに数の積の立式に及ぶ。これについては，教育的方便 (「指導不可能な内容はスキップ」) としてこれを行う立場の他に,「*数直線*」に表されている「１あたり量 × いくつ分」を数の積の意味にする立場を，あわせて見ることになる。後者は，＜数は量の抽象＞の立場である。ここでは，この立場の押さえを行う。

① ＜数は量の抽象＞は＜数の積は量の積の抽象＞

＜数は量の抽象＞とは，量をリアルの側に措き数を量の抽象と定める立場である。この立場では，数は量の絵に表現されるものになる。例えば分数「2/5」は，つぎの図式になる (図22)：

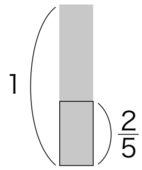


図 22

しかし，いろいろな大きさの「2/5」が描けるように,「2/5」は量を表しているのではなく，量の比を表している。＜数は量の比＞であるのにこれに抗って＜数は量の抽象＞を立てるのは，無理なスタンスである。この無理なスタンスは,「かけ算」の意味づけでいっきに苦しいものになる。

数が量の抽象だとすると，数の積は量の積の抽象でなければならない。たとえば,「2/5 × 4/3」をどう考えたらよいか？つぎのようだと，意味が立たない (図23)：

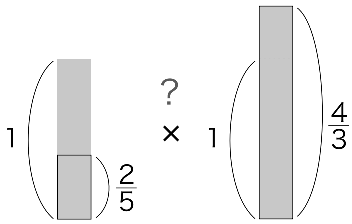


図 23

＜数は量の抽象＞はここで，つぎの理屈を出してくる：

> 「*数の積は，１あたり量 × いくつ分 の抽象である。１あたり量といくつ分 は，異なるタイプの量 (内包量と外延量) であるが，いずれにしても量である。というわけで，数の積は量の積の抽象である。*」

そして,「2/5 × 4/3」の図式が，3.(3). ①で見てきたつぎのものになる (図24)：

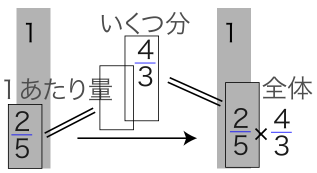


図 24

数学には「量の積」はない。「数の積」は＜倍

の合成＞が意味となり，図式もそのようになる。

②「比の３用法」「形式不易の原理」:＜明証無用＞の装置

＜数は量の抽象＞は，量をリアルの側に措く写像理論である。数は量の写像であり，数の算法は量の＜存在の事実＞の写像 (＜リアルの写し＞) である。分数・小数のかけ算・わり算」指導は文章題で始められるが，＜数は量の抽象＞の立場では，「かけ算・わり算」は＜リアルの写し＞として導入するのみだからである。

この指導は，「比の３用法」「形式不易の原理」を暗黙に使うものになっている。実際，以下に示すように，このときの「比の３用法」「形式不易の原理」は＜数は量の抽象＞の内容になる。

「比の３用法」は，つぎの述定である：

量の＜存在の事実＞に，「２ｇの３倍は６ｇ」がある。自然数の「×・÷」は，この事実の抽象をつぎの形に表すと決めたことで定まるところのものである：

$3 = 6 \div 2$ （第１用法）
$6 = 2 \times 3$ （第２用法）
$2 = 6 \div 3$ （第３用法）

量の＜存在の事実＞に，「2/5 ｇの 4/3 倍は 8/15 ｇ」がある。分数の「×・÷」は，この事実の抽象をつぎの形に表すと決めたことで定まるところのものである：

$4/3 = 8/15 \div 2/5$ （第１用法）
$8/15 = 2/5 \times 4/3$ （第２用法）
$2/5 = 8/15 \div 4/3$ （第３用法）

「比の３用法」には「形式不易の原理」が伴っている。このときの「形式不易の原理」は，つぎの述定である：

分数の「×・÷」の用法が自然数の「×・÷」の用法と同じになるのは，量がこのような存在だからである。

この場合の「比の３用法」「形式不易の原理」は，これに対し「なに・なぜ？」を言うものではない。＜リアルの写し＞として，そのまま受け入れるものである。

＜リアルの写し＞は，これの適用領域が明証無用領域になるため，非明証性のもとになる。実際，＜数は量の抽象＞では，立式は形式感覚ないしノウハウで立てるものになる。

数学では，「×・÷」の「形式不易の原理」は，つぎの内容になり，明証的である：

数の各系 (自然数, 分数, 正負の数, 複素数等) の「×・÷」は，つぎが成り立つようにつくられる (図25)：

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & \bullet \arrow[r, "n"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$m \times \bigcirc = \bigcirc \times m = n$$

「n÷m」　　図 25

そして「比の３用法」は，記号「×・÷」の文法に他ならない。

5. おわりに

「分数・小数のかけ算・わり算」の指導は難しい。「難しい」の内容は,《説明を明証的につくれない》である。明証的につくれないのは，数学の＜数は量の比＞を択らないようにしているためである。＜数は量の比＞を択らないという無理をすることで，数学の過剰と数学の非在が合わさった指導法がつくられる。数学の過剰と数学の非在が,「分数・小数のかけ算・わり算」の非明証性の内容である。

では＜数は量の比＞を択ることが問題の解決になるかというと，単純にそうはならない。＜明証的＞イコール＜易しい＞ではないからである。実際，数学は難しい科目であるが，それは＜明証的＞がむしろ＜難しい＞とイコールであることを示している。

参考文献

宮下英明 (2011) : 数と量の関係は＜数は量の比＞であって＜数は量の抽象＞ではない . 日本数学教育学会誌（算数教育), vol.93 (8), pp.2-11.

小学校学習指導要領 (平成 15 年 12 月改正)，第２章 各教科 , 第３節 算数

平成 17 年度小学校用『新編 新しい算数』, 東京書籍 .