筑波数学教育研究第２号　1983. 3

問題解決指導の意味と本質

数学研究科ＤＣ　宮　下　英　明

0. はじめに

昨今数学教育上の主要なテーマとして論じられている‘問題解決’指導は，何をするのか。問題解決の能力（skill あるいは ability）を育成すると言われている。その理念は，つぎに引用する G. Polya の主張と軌を一にしていると見てよいであろう。

> “Our knowledge about any subject consists of *information* and of *know-how*. …… in mathematics, know－how is much more important than mere possession of information. Therefore, in the high school, as any other level, we should impart, along with a certain amount of information, a certain degree of *know-how* to the student. What is know－how in mathematics? The ability to solve problems－not merely routine problems but problems requiring some degree of independence, judgment, originality, creativity. Therefore, the first and foremost duty of the high school in teaching mathematics is to emphasize *methodical work in problem solving*.” ([4, pp. vii, viii])

‘問題解決能力’は，元来，知識（information）の限界を払うものとしてその育成が論じられ，またこの意味において知識に対置されている。しかし‘問題解決能力’とはあくまで概念であって，もともと存在しているものの‘名’ではない。そこで，この概念化の仕方は妥当なものなのかどうか。また，固より能力それ自体を指導できるわけではない。そこで‘問題解決能力’を授けるとは実際の指導で何をすることなのか。

‘問題解決’指導は難しいと言われる。しかし一歩退いて，“まだまだ問題を残している前提に基づいて指導を考えているのではないか”，あるいは“もしかして元々指導出来ないようなものを指導しようとしているのではないか”という観点からも，反省してみるべきであろう。そして，‘問題解決’指導が指導する（指導出来る）ものを見据えた上で‘問題解決’指導の意義を改めて考えるということが，行なわれてよいと思われる。

本稿は，かかる問題意識に立って，問題解決指導というものの意味とそれの本質について論じようとするものである。

I. 問題解決指導の二つのカテゴリー

“問題解決指導”というとき，コトバの上では二つの場合が考えられる。一つは，問題解決の図式：

$$\begin{tikzcd} \text{Real－World の問題} \arrow[d, "\text{解釈（モデル化）}"] & \text{所要の解} \\ \text{数学の問題} \arrow[r, "\text{求解}"'] & \text{数学的解} \arrow[u, "\text{解釈}"'] \end{tikzcd}$$

及びこれを理解するために必要な諸概念を指導する場合（簡単に，**枠組指導**）であり，もう一つは，具体的な問題についてそれに対応して上の図式の内容がどうなるかを指導する場合（簡単に，**内容指導**）である。

1－1. 枠組指導＝‘問題解決’指導

枠組指導は，問題解決なるものを認識の対象として起こす枠組を，問題の内容に依らないで扱うものである。それは，具体的には，‘問題’,‘問題解決過程’,‘問題解決の様式’,‘問題解決のための能力行使’,‘問題解決に対する態度・志向’等々の概念，そしてそれを理解するために知っておくことが必要な様々な関連概念，下位概念を指導する。

例えば,‘問題解決’論で論じられる‘問題解決ストラティジー’としてどのようなものがあるかということの指導は，この指導に含まれる。実際，所謂‘問題解決’指導は，ここで定義した‘枠組指導’として特徴づけられるべきものであると思われる。即ち，それは，問題解決に関係する認識枠組で数学的内容が問題になる以前のものを，問題にしているのである。確かに,‘問題解決’のテーマの下に数学的内容の指導を本質的に取り上げているような論述を見受けることはある。しかし，それは，ここで定義した‘内容指導’を論じているのであり，そして，次節で述べるように,‘内容指導’は数学的内容の指導の一局面をなすものなのである。然るに，所謂‘問題解決’指導の方は，元来，かかる数学的内容の指導に対置される概念なのである。

‘問題解決’指導の本質が‘枠組指導’にあるということを，以下明らかにしていこう。

先ず,‘問題解決’の理念は，学校で習う（数学的）知識の限界を超えて，問題一般，特に予測出来ない将来の問題，に対処できる‘能力’の育成ということであった。ここでは‘問題解決能力’が知識に対置されているわけであるが，では,‘問題解決能力’の育成のための指導とはどのようなものなのか，また抑々‘問題解決能力’とは何なのか。

‘問題解決能力’とは，字義通りには，問題解決の行動（performance）となって発現する能力のことである。ところでこの問題解決行動として‘問題解決’論ではどのようなものが考えられているかというと，既に述べたように問題一般の解決である。そして，問題一般を解決する能力を育成するための指導として強調的に論じられているのが,‘問題解決ストラティジー’の指導である。

‘問題解決ストラティジー’として挙げられているものは，例えば,“図，図式，表，グラフなどの視覚的補助を用いる”,“類似の問題が既知のものにないかどうかを検討する”,“試行錯誤をしてみる”,“キー・ワードを捜す”,“Polya の 4 段階に合わせて問題解決を進める”,“単純あるいは特殊な場合で考えてみる”,“大まかな構想から入る”,“必要な情報を確定してそれを収集する”,“適切なストラティジーを選択する”，などである。ところで，これら‘ストラティジー’は，抑々何であろうか。それは，概念化されて意識対象となった問題解決行動の局面，様式，規範等である。

ここで再び‘問題解決能力’の概念に戻ろう。既に述べたように，それは，コトバの上では，問題解決行動となって発現する能力を意味する。ところで，概念として所有した‘問題解決ストラティジー’に従うとき，その概念を持たずには現われる筈のなかった或る種の様式化した問題解決行動が発現する。更にまた,‘問題’,‘問題解決’なる対象性とか問題解決における態度・志向とかに対する認識の仕方を指示し規定する諸概念に則ることによっても同様に，一定の問題解決行動が発現することになる。翻って,‘問題解決’論で対象化されていてそれを引き起こす‘能力’の育成が検討されている問題解決行動の中に，かかる概念に従うことによって発現する問題解決行動のカテゴリーから漏れるものはあるであろうか。筆者は，無いと考えたい。即ち，概念に従って発現する問題解決行動をもって,‘問題解決’論が対象化している問題解決行動はカバーされるのである。

したがって，少なくともこと‘問題解決’

論に関する限り，われわれは問題解決行動の背後に‘問題解決能力’を見る必要はない。‘問題’，‘問題解決の様式’，‘問題解決の過程・局面’，‘問題解決行動’，‘問題解決に対する態度・志向’などに関する諸概念，及びこれらの概念に関連する諸々の概念を，見ればよいのである。かくして，‘問題解決能力’の育成のための指導の本質は‘枠組指導’にあるという先に述べた結論に行き着く。本稿では，それ故，‘問題解決’指導と言うとき‘枠組指導’という限定された意味で考えていくことにする。

1－2. 内容指導

問題解決指導としての‘内容指導’は，具体的な問題について，解決手段や解決手順，解法の本質的な部分，解決の際の留意点などを具体的に指導するものである。但し，この場合，‘問題’自体が指導の主題となるわけではない。主題は数学的な内容，即ち数学的概念・シェマであり，これの指導の一局面として，それが活用される問題場面とその解決方法の指導があると見るべきである。即ち，‘内容指導’としての問題解決指導は，数学的な内容の指導の一環である。

かかる‘内容指導’は，算数・数学の内容指導が当然備えているべき局面である。実際，各数学的シェマ・概念の指導は，数学の内にせよ外にせよ，それを学習者が道具として有効・適切に活用出来るようにしていく指導である。役に立たないものとして指導しても始まらない。そしてこの‘道具として活用する’ことの中には，問題解決の道具として用いるということが含まれている。即ち，数学的シェマ・概念の指導には，それが用いられる，あるいはそれを用いることが出来る問題場面とは何か，この場面でそれはどのようにして用いられるのか，といったことの指導が含まれるのである。逆に，かかる指導にまで至らないシェマ・概念指導は無効というべきである。

以上述べたように，算数・数学指導は，元来，指導内容が活きて働く問題場面の指導をも射程に含むものとして捉えられている筈である。かかる問題場面込みの指導では，当然，問題を介しての指導が主要な形態となるであろう。学習者は，ここでは単に問題のパターンを学習するのではない。各数学的概念・シェマの意味や機能，それが道具として働くメカニズム等に対する認識を新たにし，それの理解を深化させていくのである。

所謂‘問題解決’指導は，このようなコンテクストにおける問題解決指導ではない。しかし，“算数・数学教材を，それが活きて働く問題場面を意識して学習する”という概念を指導するものは，‘問題解決’指導である（‘問題解決’指導における‘学習’指導の局面）。

ところで，数学的シェマ・概念の中には，それを道具として用いることの出来る問題場面が非常に多様で，そのため却ってその道具的機能をはっきりした形では示せないというものもある。例えば，‘方程式’，‘関数’，‘集合’の概念がそうである。これらの概念は，問題場面を特定しないかわりに，応用範囲が広い。そしてこの応用範囲の広さが，これらの概念を殆ど問題の内容に対してフリー（content－free）なものに見せる。方程式とか関数や集合のアイデアを用いることが‘問題解決ストラティジー’として挙げられることがあるのは，このためであろう。

このように，‘問題解決’指導で取り上げる概念・シェマの基準を‘問題を特定しない’という点にもとめれば，その指導対象には数学的な概念・シェマが入ってくることになる。しかしこのとき，‘問題解決’指導の概念は非常に曖昧である。‘問題を特定しない’ということが程度の問題に過ぎなくなるからである。

Ⅱ. 問題解決指導

2－1. 枠組指導の場合

(1) 枠組指導の意義

問題解決行動は規約的な行動であり，或る枠組に則り，拠って立つことによって初めて現出するところのものである。そして，この枠組を顕在化して指導するのが，問題解決指導としての“枠組指導”である。既に述べたように，それは具体的には，‘問題’,‘問題解決過程’,‘問題解決の様式’,‘問題解決のための能力行使’,‘問題解決に対する態度・志向’などの概念，及びこれら概念を理解するために必要な諸々の概念（関連及び下位概念）を指導するものである。

問題解決行動が拠って立っている枠組は，一つの文化遺産としての規約であり，したがって，それを学習したことのない者も自然に対象として生み出していけるというようなものではない。(たとえ一旦与えられさえすれば自明になるようなものであっても。) そこで，具体的な問題においてその解決の方法を知識として授けるのと並行して，問題解決行動が拠って立つ枠組を子どもに学習させることが必要になる。(註) 枠組指導はこのための指導であり，やはり文化遺産伝達の一つの営みである。

‘枠組’は，直接問題解決に役立つためのものではなく，それの知識無しには問題解決という行為自体が成立しないところのものである。したがって，‘枠組’を認識し理解しておくことは，問題解決の遂行が可能になるための必要条件である。そこで，比喩的に，学習者に問題解決の‘土俵’というもの，そしてそれに上ることを教えるのが枠組指導である，と言うことが出来る。土俵上での技を教えるものは，枠組指導とは別の問題解決指導，即ち“内容指導”である。

(註) Cf. “The student needs to learn that a problem is a situation for which one does not have a ready solution. He needs to learn that he is supposed to have difficulty with a problem, he is supposed to have to deliberate... For the student who does not understand the meaning of a problem the teacher may say: “John, you are not supposed to *know* how to work that problem. You are supposed to *figure out* a way to work it. If you have trouble, that's what you should have...””
([1, p. 248])

(2) 枠組指導の三つの相

既に述べてきたように，枠組指導は概念指導の一つである。そして，概念指導には，概念の‘名’を与えること，内包を理解させること，外延に関する知識を与えること，という三つの相が考えられる。

概念は，文化遺産として継承されている認識形式（認識に関する規約）である。それは，歴史の産物であり，相対的な意義のものである。したがって特に，個人が自然に自らの内で育むといったようなものではない。そこで，概念指導では，概念そのものを意識対象化させることが行なわれなければならないわけである。

概念の意識対象化は，その概念の‘名’が与えられることによって起こる。‘名’を受容するには，勿論何らかのレディネスがなければならない。しかし，概念が意識対象化されるのはその‘名’が受けとめられたときである，という点に変わりはない。そして，概念形成は，この‘名’の下に経験が組織されていくという具合に行なわれるのである。

例えば,‘ロンリテキ’というコトバが与えられることによって,《‘ロンリテキ’とは何を指すのか》,《‘ロンリテキ’ということには何があるのか》といった考え方あるいは学習志向の枠組がもたらされる。この枠組無しには,‘論理的’なるものについての学習の内

容をなす経験の組織化は起こりようがない。即ち，論理的なるものの範例から入って‘論理的’の概念に到達させるにしても，その範例が‘ロンリテキ’なるものの範例であるということを明示しなければ，範例は一つの思考対象としてはまとまらず，したがってこのとき‘論理的’の概念に到達することは期待できそうにない。このように，概念学習の契機は，概念の‘名’を受け取ることによる概念そのものの意識対象化であり，したがって，概念指導では概念の‘名’を明示することが本質的な点となるのである。

概念を学習者に意識対象化させることのつぎには，その概念の内包と外延に関して指導することが控えている。内包と外延は，概念の二つの側面である。そしてこれに対応して，概念指導に概念の内包に関するものと外延に関するものの二つの相を区別して考えることが出来る。即ち，概念規定を与える相と，概念のカテゴリー（例えば，‘Polya の 4 段階’の範例，‘試行錯誤’の範例）を学習させる相である。但し，言うまでもなく，概念指導は，概念の内包と外延に関する学習が交互に順次深められていくように為されるべきである。概念学習はレベルの積み上げであり，その各レベルで，一方を欠いての概念の理解はあり得ないからである。

(3) 枠組指導における問題解決の実践の位置づけ

枠組指導で指導される概念の範例は，個々の具体的な問題及び問題解決の中に求められるものであるから，枠組指導は，問題解決の実践を伴なう形の指導となる。

この指導で取り上げられる問題はあくまで何がしかの概念をそれを介して指導するためのものであり，生徒がそれを解けるようになることが指導の目的になるわけではない。即ち，問題への取り組みを生徒に課することによって，‘枠組’に関する如何なる概念を学習させるのかという観点から問題が教材として選ばれ，また，指導対象となっている概念が実際に学習され理解されたかどうかが指導の評価基準になるのである。したがって，生徒に問題解決の実践を課す指導は，指導対象の概念が生徒に伝わるように，概念が明言され，且つその概念が顕在化され続けるようなものでなければならない。

ここで，つぎのような反論が起こるかも知れない。即ち，問題解決の実践の意義は，‘概念’の学習などではなく，正しく‘問題解決能力’というコトバでイメージされるような何かの育成なのだ，と。確かに，幾つもの問題解決の実践を経験することによって内に形成されてくるものが，コトバという表現形態をもつ概念なるものでカバーし尽くせないことは，事実である。しかし，問題は，そのようなものを指導で直接狙うのは不可能だということである。われわれは，所謂‘量から質への転換’というものをある程度信ずべきであり，またそうする他ないと思われる。即ち，概念学習としての‘枠組’学習を組織的に行ない充実させることを通して，‘問題解決能力’なるコトバでイメージされるようなある種の心的潜在力が形成されるのだ，というように。

G. Polya はつぎのように述べている：

> "Solving problems is a practical art, like swimming, or skiing, or playing the piano: you can learn it only by imitation and practice... if you wish to become a problem solver you have to solve problems." (〔4, p. V〕)

ここでも，水泳，スキー，ピアノの指導が組織的であり，概念化された各種の行動形態を理解し実行できるようにすることを課すものである，ということを見逃すべきではない。‘泳ぐ’こと自体を直接指導することは出来ないのである。

最後に，問題解決を数多く課すという指導方略(註)に触れることにする。問題解決の体験を数多く積むことによって‘問題解決能力’

としてイメージされるような心的潜在力が形成されることは，確かにあるであろう。また，問題解決の際の‘八方塞がり’,‘閃きによる難関突破’,‘set－breaking’といった概念のように，それを体験的に理解させるためのこれぞという問題がない場合とか,‘問題解決’とはこのような精神的及び肉体的な体験なのだということを全体的に摑ませようとする場合には，問題解決の体験を数多く積ませるという指導方略が意味をもってくるであろう。しかし，このような指導方略を採用することは時間的に難しいであろうし，また実際問題として一種の賭けであるという点は否めない。

(註) Cf. "The student should acquire as much experience of independent work as possible......" ([3, p. 1])

(4) ＜‘知識’対‘生産的思考’＞の図式について

問題解決では，多くの場合，情報収集が必要になる。そしてまた多くの場合，この情報は，累積性・系統性をもつ知識体系の中に求められる。したがって，問題解決過程は，未知の知識体系を学習する過程を含むものとなる。またそれ故，問題解決指導としての“枠組指導”は，その一環として学習指導を含むことになる。枠組指導に含まれるこの学習指導は，概念化されている“学習のノウ・ハウ”を教授する概念指導である。

‘問題解決’の理念には，はじめに述べたように,‘知識’の限界を払うということがあった。即ち，新しい問題状況に対面したとき，何の手も下せないというのではなく，それなりに対処していけるように，生徒の能力を開発していこうということである。この意味で,‘生産的思考’あるいは‘good thinking’が‘知識’に対置されることがある。しかし，ここで‘生産的思考’として概念化されたものは，実体をもった何がしかの思考ではなく，思考の或る幾つかの形式に過ぎない。即ち，具体的な生産的思考から抽象して概念化した或る種の思考形式，それが‘生産的思考’の実体である。したがって特にそれは，枠組指導の対象となる。

‘生産的思考’という思考形式に内実が与えられなければ，本来の生産的思考はない。そして，既有の知識でこの内実が埋められないとすれば，学習によって不足の知識を補う他ない。この場合，知識の限界は，新しい知識の獲得によって乗り超えられるのみである。だから,‘生産的思考’は“限界をもった知識”に対置されるものではなく，あくまで‘非生産的’な思考形式に対置されるべきものなのである。

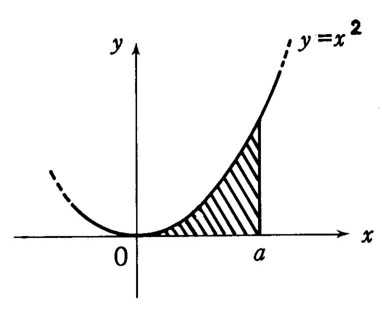
2－2. 内容指導の場合

問題解決指導としての“内容指導”は，既に述べたように，数学的概念・シェマの指導の一局面として位置づけられるものであり，また，数学的概念・シェマを道具として活用出来ることというのが指導の到達目標とされるならば，必然的に課題にのぼらねばならないものである。それは，指導対象になっている数学的概念・シェマが問題解決の道具として機能し得るような問題の構造，及びそれの道具としての実際の使用法を，指導する。

例として,‘積分’の概念の指導を考えることにしよう。

高校数学にあっては，求面積が積分の典型的な問題である。例えば，つぎのような問題である：

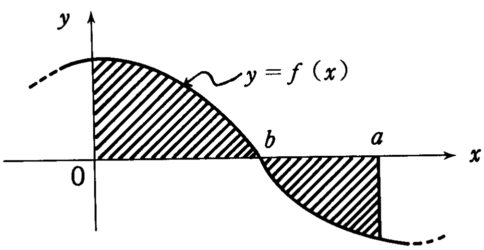
下図の斜線部分の面積を求めよ。



しかし，積分がこのように求面積の道具の如く教えられるに止まるとすれば，それの本来の機能を以って役立てられるということは，特に数学外の領域では，余り期待出来ない。確かに，問題になった時点で所要の積分の活用法を新たに学習すればよいのだという考え方もあるであろう。しかし，このような学習にスムーズに入り込めるかどうかは，高校数学で積分をどのように理解したかによって，かなり左右されるであろう。

それに，高校数学を大学での専門研究のための下準備として観念するならば，"積分を役立てることが出来るか" という問題にそれ程拘る必要はないかも知れないが，しかし高校数学をそれ自体完結したものと捉え，それに応じて積分指導も一応完結しているべきと考えるならば，積分が道具として機能する問題の構造を生徒に把握させるところまで積分指導をもっていくということが一つの課題となるであろう。そこで，積分が道具として機能する問題の典型的な構造というものを考えてみることにしよう。

上の積分の例題からこの問題に入っていくことにしよう。斜線部分の面積は，積分 $\int_0^a x^2 dx$ ででる。しかし，積分と面積のこの一致は，たまたまそうなったに過ぎない。事実，例えば，下図の斜線部分の面積を求める式は，$\int_0^b f(x)\,dx - \int_b^a f(x)\,dx$ 即ち，$\int_0^b f(x)\,dx + \int_b^a (-f(x))\,dx$ でなければならない：



積分と面積の関係に対する一つの有効な解釈は，"積分は面積ではなく面積の増分を表わす" とすることによって与えられる。即ち，関数 $y=f(x)$ に対して，$f(x)$ は x における面積の増加率を表わしている，と考えるのである。この解釈を生徒に理解させるためには，'区分求積' の概念をつぎのような解釈で導入することが必要であると思われる。即ち，

$$\int_0^a x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n}$$

で積

$$\left(\frac{ka}{n}\right)^2 \cdot \frac{a}{n}$$

は，(たての長さ)×(よこの長さ)＝(長方形の面積) の計算をしているのではなく (よこの単位長さあたりの面積の増加率)×(よこの長さ)＝(面積の増分) の計算をしている，というように。そして正にこの解釈の中に，積分が道具として活用される問題の一つの典型的な構造が現われている。それは，二種類の量 'α'，'β' があって，'α' の単位大きさあたりの 'β' の増加率 y が 'α' の大きさ x の関数で表わされているときに 'β' の増分を求める，という問題構造である。したがって，例えば，物体の落下距離を求める問題は，落下速度 (＝単位時間あたりの落下距離の増加率) y が時間 x の関数 $y = gx$ (g は重力加速度) で与えられるから，積分が解決手段となる問題だということになる。

確かに，以上述べてきた積分の問題構造を生徒に理解させることは，易しいとはいえない。しかし，教材を考える一つの方向を与えるものとして，"指導概念・シェマが道具として機能する問題の構造というものを問題化し，これの指導の可能性を探っていく" という問題意識の重要性を，ここでは強調しておきたい。

Ⅲ．'数学的な考え方' と '問題解決'

'数学的な考え方' の育成ということはわが国における算数・数学科の指導理念の一つ

であるが，このための指導は，筆者の見るところ，‘問題解決’指導（＝問題解決指導としての“枠組指導”）と共通する性格を有している。本章では，この点を論じることにする。

3－1.‘数学的な考え方’の概念（〔2〕より）

‘数学的な考え方’の概念を理解しようとするとき，中島健三氏の著作〔2〕は最も参考とすべき文献の一つであろう。‘数学的な考え方’はそこではどのような概念として描かれているか。このことを簡単に見ていくことにしよう。

先ず，‘数学的な考え方’の育成ということを打ち出した狙いであるが，それについては次のように述べられている：

“……現在の数学教育を，さらには，これから先の数学教育の目的を考えるときに，特定の数学的な知識や技能を，少しでも多く能率よく習得させるというねらいに立って数学教育を考えるよりは，むしろ算数なり数学にふさわしい創造的な活動を体験させ，それを通して創造的に考察し処理する能力や態度をのばすようにすることが，しだいに重要な意味をもってくることがわかる。数学教育の目標に関して，こうした精神的能力の陶冶についてのねらいを表わしたことばが，従来から用いられている「数学的な考え方」の育成という表現である。”（pp. 30, 31）

そこで，‘数学的な考え方’であるが，それは，

“「算数・数学にふさわしい立場で，主体的に課題をとらえ，創造的に考察し処理するという，目的をもった一つの全体的な活動ができること」を指している”（p. 107）

ということである。そして‘数学的な考え方’の育成は，算数・数学教育の目標として，つぎのように位置づけられている：

“これまで，算数・数学教育の目標として，最も重点をおいて考えたことは「数学的な考え方」の育成ということであり，この実現に，数学教育の進展の姿があるはずでもある。これは，この20数年来，算数・数学の教育に携わる者が総力をあげて取り組んできた課題であるといってもよかろう。”（p. ii）

ところで，‘数学的な考え方’が目指している算数・数学にふさわしい創造的な活動 ── “全体的な構造をもった創造的な活動”（p. 102）── であるが，それは，より詳しくは，どのようなものを指しているのか。これについては，次のように述べられる：

“算数・数学における創造活動は，「簡潔，明確，統合といったことにロマンを感ずる心情から『課題』をつかみ，そうしたロマンの実現のための探究的な行動である」ということもできよう。”（p. 84）

3－2.‘数学的な考え方’の指導の本質・在り方

以上，‘数学的な考え方’がどのような概念であるのかを〔2〕の中に読んできたのであるが，では，‘数学的な考え方’の育成を目指した指導とはどのようなものであり，また何がその本質なのであろうか。‘数学的な考え方’とは，“算数・数学にふさわしい（全体的な構造をもった）創造的な活動”を目指したものであった。しかし，このような活動そのものを指導することは勿論出来ない。というよりも，抑々“算数・数学にふさわしい創造的な活動”と述べられるとき，それは，行動の一つの類型を対象化させる概念に過ぎないと言える。そして，勿論，行動類型は行動そのものではない。したがって，‘問題解決能力’の育成ということについて述べたのと同様なことが，ここでも言える。即ち，‘数学的な考え方’の育成の指導として組織可能なものは，“算数・数学にふさわしい創造的な活動”なる行動類型やかかる行動に伴うべき態度・志向や価値観などを意識対象化させ理解させる指導であり，結局それは，概念化されたこれらのことを指導するところの概念指導である

他ない。

では，‘数学的な考え方’のこのような指導は，どのような概念を指導するものとして考えられるべきであろうか。“「数学的な考え方」という創造的な活動がもつべき構造（５つのポイント）”として〔2〕で挙げられている次のものは，認識の或る仕方を対象化する概念と見なせば，そのまま指導対象として，しかも本質的な指導対象として，見直すことが出来るであろう：

“①課題を，簡潔，明確，統合などの観点をふまえて把握すること　②仮想的な対象の設定とその実在化のための手法　③解決の鍵としての「数学的なアイデア」の存在と意識化　④構造の認識と保存 ── 特に，拡張・一般化による創造の手法と論理　⑤評価 ── 解決の確認とその真価の感得，残された問題点と発展への志向”

（〔2, p. 101〕）

‘数学的な考え方’の指導というものを以上のように特徴づけるとき，指導方法・指導の在り様は，‘問題解決’指導の場合と本質的に同じでなければならない。即ち，組織化された概念指導である。‘数学的な考え方’は，“日常の指導において，創造的な学習の体験を積み重ねて，はじめて，その育成が可能と考えられるはずのものである”（〔2, p. ii〕）と言われているのであるが，筆者の考えでは，この“日常の指導”は，“算数・数学にふさわしい創造的な活動”の概念，かかる活動に伴うべき態度・志向・価値観に関する概念，そしてこれらの概念を構成したりそれらに関連している諸々の概念のうちの何がしかを理解させることを射程におくものとして，性格づけられねばならない。そして，筆者は，これらの概念を理解させるための指導方略として“創造的な学習の体験を積”ませるということがあるのだ，と考えるのである。即ち，‘数学的な考え方’の指導で課される創造的な学習の体験というものは，学習している概念の範例（モデル）を与えるものとして位置づけられるべきである，ということである。

しかし問題は，このようにして未知の概念を既知に変え，また各概念に対する理解を深化させることによって，‘数学的な考え方’というコトバでイメージされるような心的な構え・潜在力が形成されるに至るのかということであろう。しかし，このことは期待してよいし，また期待すべきであると思われる。（“内容的に互いに無関係な創造的学習の体験を単純に累積させることよりは，少なくともこの組織的な方法の方により効果があるのではないか”という消極的な立場からではなく。）確かに，このような‘量から質への転換’を信ずる根拠を明らかな形で示せるわけではない。しかし，かかる転換は，‘基本の積み上げ’ということが強調される芸術やスポーツなどの領域において，顕著に見えている事実なのではないだろうか。

3－3. ‘数学的な考え方’の指導と‘問題解決’指導

最後に，‘数学的な考え方’の指導と‘問題解決’指導の相互の位置関係について，簡単に触れておこう。

指導理念（目的概念）としての‘数学的な考え方’と‘問題解決’は，かなり近いものである。実際，〔2〕の中に次のような叙述が見出される：

“……「数学的な考え方」は，いわば算数・数学にふさわしい創造的な問題解決を遂行することを目指している……”

（p. 102）

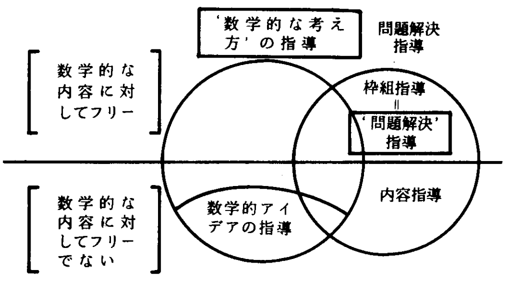
“（そこ〔NCTM の1959年の年報の「数学的な思考の様式」の項〕では，「問題解決」の過程として，①問題提示，②問題把握，③観察と探求，④整理，⑤次の探求，⑥形式にまとめる，⑦一般化，⑧吟味と応用，の八つの段階を用いているが，いくつかの問題についての例示がのっている。全般的には，われわれの「数学的な考え方」

にかなり近い内容を指しているとみてよかろう)。”(p. 114)

しかし，数学に関わっていく姿勢という点で，‘数学的な考え方’と‘問題解決’の理念には大きな違いが見られるであろう。実際，‘数学的な考え方’の場合には，創造的活動とは言っても“算数・数学にふさわしい”創造的活動というものがあくまで強調されるのである。したがって，“「数学的な考え方」として目指しているものは，全体的な構造をもった創造的な活動であって，……数学的なアイデア（数学的な考え）だけを取り上げて「数学的な考え方」といっているのではない”（〔2, p. 102〕）としても，かなりの力点が数学的アイデアの指導に置かれていると考えられるべきである。

翻って，‘問題解決’の場合では，数学的な内容としての数学的アイデアの指導は，本質的には語られることがない。それは，‘問題解決能力’が問題の如何を問わない一般的解決能力として論じられていることからもわかる。したがって，著しい場合には，外見上，算数・数学科の指導だか‘生活科’の指導だか，あるいは単なるパズル解きであるのか，わけがわからないというようなものが，‘問題解決’指導として打出されることになる。

そこで，‘数学的な考え方’の指導と‘問題解決’指導との関係を図で表わしてみるならば，つぎのようになるであろう：



Ⅳ. おわりに

Polya は，知識を information と know－how の二つに分け，数学における know－how とは問題を解く能力（ability）であると主張した（Ch. O)。そして，今日の所謂‘問題解決’の理念では，‘問題解決能力’が概念化されてこれの育成が指導目的化されている。

know－how に対してはそれに関しての information を考えることが出来る。したがって，知識を information と know－how の二つのカテゴリーに分けるやり方は，本質的なものとは見なし難い。

また，‘問題解決能力’という能力の存在も，筆者は疑う。では，‘問題解決能力’のかわりに何が実在していて，また何を指導すれば，‘問題解決’の理念が狙っているものに近づけるであろうか。先ず，‘問題解決能力’とは概念に過ぎない。実在しているものは，問題解決一般にあるべきものとして抽象された思考形式や態度・志向の様式等の概念 ── 必然的に数学的内容に対してフリーな ── であり，そしてこれを指導することが‘問題解決’指導である他ない。

筆者が本論で問題解決指導を枠組指導＝‘問題解決’指導と内容指導の二つのカテゴリーに分け，それぞれについて論じてきたのは，以上のような認識に立ってのことである。そこで，本稿で課題として残された最も大きなものは，枠組指導と内容指導の兼合いの問題である。

枠組指導のために独立の単元を設けることは，現状に於ては不可能であるし，また実際，算数・数学の各単元で枠組指導の機会がある以上，意味があるとも思えない。そこで問題は，数学的内容（教材）の指導の中にどのように枠組指導を含ませるかということである。

インプリシットな形での枠組指導は，殆ど意味がないと思われる。というのも，一般的

傾向として，生徒の目は専ら問題の内容の方に向けられ，その内容に対してフリーな思考形式の方へは（促されない限り）意識が及びにくいからである。したがって，枠組指導はイクスプリシットな形で行なわれる必要がある。しかもそれは，様々な機会を捉えて繰り返すという具合になるであろう。

枠組指導をプログラムにのせるためには，それ故，指導すべき‘枠組’のレパートリーを定めることと，各々の指導をどのような教材指導と絡ませながら同時にイクスプリシットにしていくかを計ることが，行なわれなければならない。しかしかかる課題は，何も‘問題解決’が唱えられたことによって新しく出て来るのではない。それは，‘数学的な考え方’の育成（一般に‘形式陶冶’）を問題にしても課題として自ずと浮かんでくるのであって，それ故，われわれにとって決して目新しいものではないのである。

引 用 文 献

〔1〕 Henderson, K. B. & Pingry, R. E. : Problem Solving in Mathematics. In NCTM, The Learning of Mathematics : Its Theory and Practice (21 st Yearbook), 1953, pp. 228 − 270.

〔2〕 中島健三：算数・数学教育と数学的な考え方，金子書房，1981.

〔3〕 Polya, G. : How to Solve It, Princeton Univ. Press, 1945.

〔4〕 ——. : Mathematical Discovery vol. I, John Wiley & Sons, Inc., 1962.