図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための

「数」の数学 対 学校数学 (4)

「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ

Ver. 2012-04-12

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」の数学対学校数学 (4)

「分数のかけ算・わり算」が ペンキを塗る話になるわけ

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている

「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学
—— ＜数は量の比＞対＜数は量の抽象＞ ——

を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は,「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの, <「数」の数学対学校数学>シリーズの 4 になるものです。

「「数」の数学対学校数学」シリーズの趣旨は, 読者が学校数学の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは,「「数」がわかる本」シリーズに後続する内容になっています。
学校数学の「数」は, 数学の「数」とは違っています。特に, 学校数学の「数」は, 数学になっていません。学校数学の「数」に対するときは, このことを理解している必要があります。そして, このことの理解には, 数学の「数」の理解が含まれるわけです。

「「数」がわかる本」シリーズは, 現在かなり大部になっています。そこで, この内容の<早わかり>としてつぎのテクストを用意していますので, 利用してください:

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

<「数」がわかる本>シリーズ (数学の「数」)

- 「数とは何か?」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講

<「数」の数学対学校数学>シリーズ (イデオロギーの「数」)

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か?—学校数学の「量」
- 学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには, 数学が必要
- 「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ (本テクスト)
- 「数直線でかけ算・わり算」は, わかるのがおかしい

<「かけ算の順序」論争解説>シリーズ (モンスターの「数」)

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

「分数のかけ算・わり算」の授業は，算数科で最も難しい授業になる。
どういう意味で難しいのか？
「分数のかけ算・わり算」の授業の難しさは，

A. 内容が，難解
B. 推論の階梯が長い

ではない。つぎのことから来る難しさである：

C. 喩え話・こじつけを，数学 (合理) に装う

「分数のかけ算・わり算」の授業の難しさが《教授 / 学習内容に問題がある》タイプの難しさであることは，一般に知られていない。これが問題である。
実際，このことを知っていないと，つぎが授業困難の理由にされてしまう：

- 教員の授業力
- 生徒の能力

教師は，「指導法」に解決を求める。
「*うまい指導法がどこかにあり，それを自分はもっていない*」というわけである。
生徒は，わからないのを自分のアタマのせいにする。
「*わからないのは，アタマが悪いからだ*」というわけである。
＜わかるべきもの＞になっていないものを＜わかるべきもの＞にして，教師も生徒もひとりで自分を苦しめる。彼らは，「分数のかけ算･わり算」の現行の指導法に翻弄されているわけである。

この構造は，「理不尽」としなければならない。
理不尽は，正されるべきである。そして，正すための第一歩は，「理不尽」を認識することである。
すなわち，「分数のかけ算・わり算」に苦しむのは自分のアタマのせいではない，ということを知る。《喩え話・こじつけを数学 (合理) であるとして，これをわかろうとする》が自分を苦しめている，ということを知る。これである。

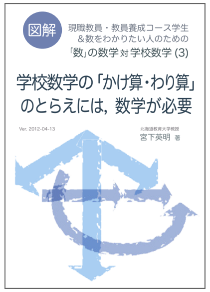
そこで，本論考を以て，「分数のかけ算・わり算」の現行指導法がどんなぐあいに《喩え話･こじつけを数学に装う》になっているかを行論する。
論考の趣旨より，行論はつぎの形になる：

> 「分数のかけ算・わり算」の数学と「分数のかけ算・わり算」の現行の指導法を並べ，後者が喩え話・こじつけを内容にしていることを示す。

本テクストの位置づけ

現時点では，本テクストはつぎのように位置づく：

『学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要』



『「小数」の数学』

『「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ』

『「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい』

1 学校数学は，＜数は量の抽象＞の立場

1.0　要旨

学校数学の「数」は，＜数は量の抽象＞である。「分数のかけ算･わり算」も，この立場を表すところとなる。

「かけ算･わり算」の指導は, 文章題で始められる。＜数は量の抽象＞では,「かけ算・わり算」は＜リアルな事象の写し＞として導入するのみだからである。

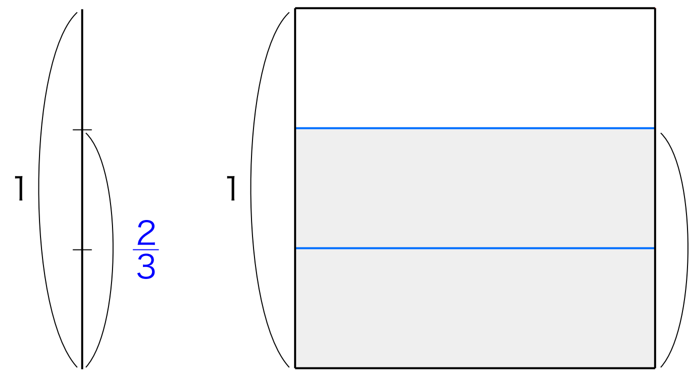
「分数のかけ算・わり算」の立式・計算の導入では，３つの方式が認められる。「ペンキ塗り」型 ,「長方形を１と見る」型 ,「*数直線*」型である。ただし，このうちのどれか一つが択ばれそしてこれで終始するというのではなく，一つの方式の部分的採用，異なる方式の混用といったふうになる。

「分数のかけ算・わり算」の立式は，＜説明＞抜きのものになる。このときに方便として使われるのが，「比の３用法」と「形式不易の原理」である。
文章題には比例関係の問題が用いられるが，＜倍の倍＞型の問題より比例関係の問題の方が，生徒が「比の３用法」「形式不易の原理」に乗ってくれやすくなるからである。

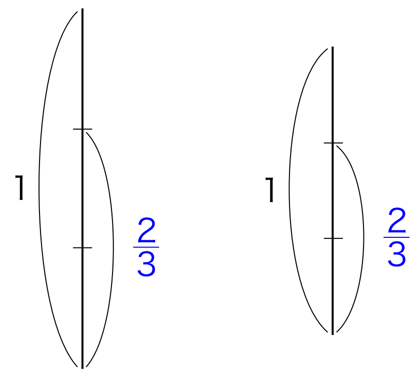
「わり算」導入に使う文章題は，「第３用法」タイプになる。「第１用法」タイプは，「ペンキ塗り」型，「長方形を１と見る」型では説明できないものになり，「*数直線*」型でも，ただでさえ複雑な「第３用法」タイプよりさらに複雑になるからである。

1.1　「×」の意味が ,「１あたり量 × いくつ分」

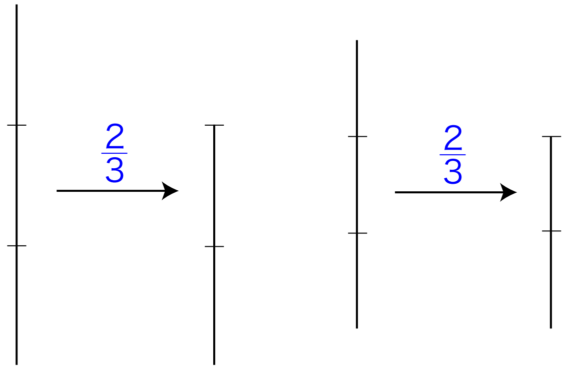
学校数学の「数」は，＜数は量の抽象＞である。
特に，分数「2/3」は，つぎの絵に表現されるものになる：



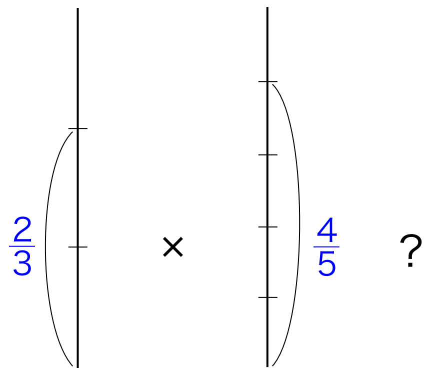
実際には，つぎの二つの「2/3」を並べてみればわかるように，「2/3」は量を表しているのではなく，量の比を表している：



すなわち，こういうことである：



＜数は量の抽象＞の無理な立場は，「かけ算」の意味づけでいっきょに苦しいものになる。
数が量の抽象だとすると，数の積は量の積の抽象でなければならない。
たとえば，「2/3 × 4/5」をどう考えたらよいか？
つぎのようだと，意味が立たない：

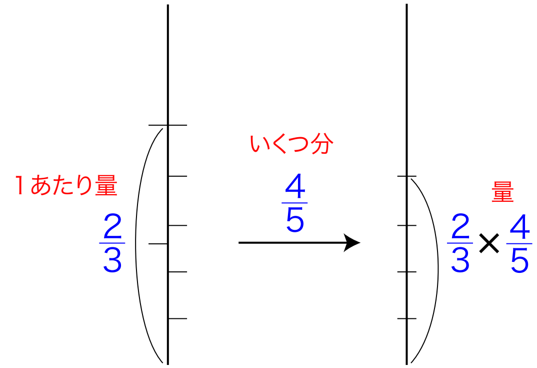


＜数は量の抽象＞はここで，つぎの理屈を示してくる：

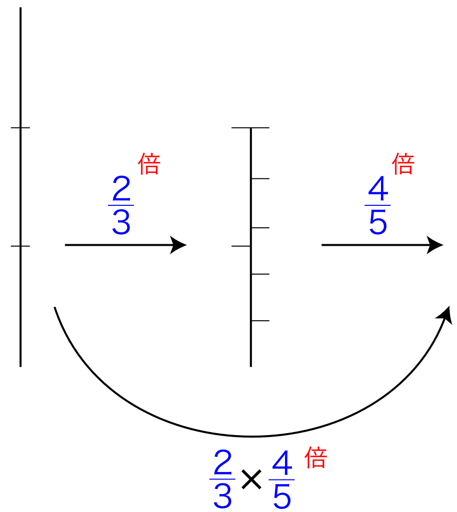
「かけ算は，1あたり量 × いくつ分 である。
1あたり量，いくつ分 は，異なるタイプの量（内包量と外延量）であるが，いずれにしても量である。
というわけで，数はやはり量の抽象であり，そして数の積は量の積の抽象である。」

数学は，＜数は量の比＞である。
＜数は量の抽象＞と＜数は量の比＞を対比すると，つぎのようになる：

数は量の抽象：



数は量の比：



しかし，学校数学が数学と見なしているのは，＜数は量の抽象＞の図式の方である。

1.2　立式が，文章題の抽象

学校数学では，「分数のかけ算・わり算」の指導は，文章題で始めるものになる。特に，比例関係の文章題で始めるものになる。
なぜか？
学校数学は＜数は量の抽象＞を立場にしており，そして＜数は量の抽象＞の立場では，立式は量の演算を抽象する行為ということになるからである。
このとき，数の「×」は量の「×」の抽象であり，数の「÷」は量の「÷」の抽象である。

しかし，量の「×・÷」とは何か？
数学には，量の「×・÷」はない。

＜数は量の抽象＞は，「1 あたり量 × いくつ分」を量の「×」ということにする。
「1 あたり量」「いくつ分」という異質なものをともに「量」と呼ぶことについては，「内包量・外延量」のことばを用いて，これでよいのだという説明をつくる。
実際，この説明は，今日教育現場で広く受け入れられている。

＜数は量の抽象＞では，数式「2/3 × 3/4」は，量に関するつぎの事態の抽象である：

「ここに液体がある。1 dL が 2/3 kg だと, 3/4 dL で何 kg か？」

また，数式「3/4 ÷ 2/3」は，量に関するつぎの事態を抽象したものである：

「ここに液体がある。1dL が 2/3 kg だと, 何 dL で 3/4 kg か？」
「ここに液体がある。1dL が 何 kg だと, 2/3 dL で 3/4 kg か？」

＜数は量の抽象＞にとって，「×・÷」とはこのようなものである。

数学だと，《分数を係数にしている量から，分数の「×・÷」を導く》は循環論法になる。しかし，＜数は量の抽象＞の立場では，この循環論法は問題にならない。
＜数は量の抽象＞は，「*2 は，リンゴ 2 個，犬 2 匹，棒 2 本，‥‥ の抽象である*」と言う。2 の前に既に 2 があることに循環論法を見そうなものであるが，＜数は量の抽象＞ではこの循環論法も問題にならない。
「*1 億は何が 1 億の抽象か？*」の論難も，問題にならない。
なぜか？

＜数は量の抽象＞は，数学を＜存在法則＞(唯物論) に基づかせようという考え方であり，そして＜存在法則＞の立場に立つ者にとって，＜存在法則＞は論理そのものであって，これに対し論理を立てるというものではないからである。

1.3「比の３用法」を＜存在法則＞として立てる

学校数学は＜数は量の抽象＞を立場にしており，そして＜数は量の抽象＞の立場では，数の「×・÷」は量の事態の抽象である。
では，「抽象」と称している＜量の事態と数の「×・÷」の対応＞は，どういうふうに定まっているのか？

＜数は量の抽象＞の立場では，これは＜存在法則＞ということになる。
そして，この＜存在法則＞の表現が，「比の３用法」である。

「比の３用法」とはどういうものであったか，確認しておく。
「２ｇの３倍は６ｇ」から，つぎの３タイプの問題が導かれる：

「２ｇの何倍が6ｇか?」	「２ｇの3倍は何ｇか?」	「何ｇの3倍が6ｇか?」
２g $\xrightarrow{\text{何}}$ ６g	２g $\xrightarrow{3}$ 何g	何g $\xrightarrow{3}$ ６g

＜数は量の抽象＞の立場は，「比の３用法」の言い回しを以て，この３タイプの問題に対し「×」「÷」がつぎのように定まると説く：

「２ｇの何倍が6ｇか?」	「２ｇの3倍は何ｇか?」	「何ｇの3倍が6ｇか?」
比の第１用法: 何 ＝ ６ ÷ ２	比の第２用法: 何 ＝ ２ × ３	比の第３用法: 何 ＝ ６ ÷ ３

「比の３用法」は，これに対し「なに・なぜ？」を言うものではない。
「比の３用法」は，＜存在法則＞として受け入れる / 覚えるものになる。
——＜存在法則＞なので，理屈以前・理屈無用となるわけである。

数学では，「×・÷」の立式は「×・÷」の文法という内容になり，明証的である。(→ §「かけ算・わり算の立式・計算」の数学——＜表現の還元＞の推論)

これに対し学校数学は，＜数は量の抽象＞の立場なので，「×・÷」の文法という形の説明はできない。
学校数学の「数と量」は，＜存在法則＞を措定するふうになる。量をリアルな存在とし，数を量の抽象にする。数・量に関する命題は，＜存在法則＞の記述というものになる。
学校数学では，「速さ＝距離 ÷ 時間」「距離＝速さ × 時間」「時間＝距離÷速さ」が＜存在法則＞として認める / 覚えるものになるが，「比の３用法」もこれと同じ扱いである。

なお，＜存在法則＞を措定する立場には，唯物論イデオロギーが出自になっているものがあり，学校数学の現行はこの歴史的視点を欠いては理解できない。

1.4「形式不易の原理」を＜存在法則＞として立てる

「比の３用法」は,「×･÷」に対する「なに･なぜ？」を封じるものである。文章題に対する「自然数のかけ算・わり算」の立式は，この「比の３用法」で処した。

つぎは「分数・小数のかけ算・わり算」である。
この立式をどう処すか？
「形式不易の原理」の＜存在法則＞を立てて，「比の３用法」を分数・小数に拡張する。 ――これが方法になる。
すなわち，つぎのように言う：

> 「*自然数のかけ算が立式される文章題は,*
> *自然数が分数・小数になっても，かけ算の立式になる。*
> *わり算も同様。*
> *このことに理屈はない。*」

こうして，分数･小数の「×･÷」も,「なに･なぜ？」のないものになった。実際，＜数は量の抽象＞では，立式は形式感覚ないしノウハウで立てるものになる。

数学では，「×・÷」の「形式不易の原理」は，数の系（自然数，分数，正負の数，複素数等）を通じて，つぎの「×・÷」の文法を共通にしているという内容になり，明証的である：

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & \bullet \arrow[r, "n"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$m\times\bigcirc=\bigcirc\times m=n$$

「n÷m」

これに対し学校数学は，＜数は量の抽象＞の立場なので，「×・÷」の文法という形の説明はできない。
存在法則のように「形式不易の原理」を説くところの，＜押しつけ＞になるのである：

> *《＜存在法則＞は，自然数，分数，正負の数，‥‥それぞれにおいて，＜形式＞として記述される。もとの＜存在法則＞が同じであれば，数が違っても＜形式＞は同じである。》*

2　指導方法

2.1「立式・計算」に３つの方式
—「ペンキ塗り」「長方形を１と見る」「数直線」

2.2「わり算」導入に使う文章題は
「第３用法」タイプ

2.1「立式・計算」に３つの方式
―「ペンキ塗り」型,「長方形を１と見る」型,「*数直線*」型

「分数のかけ算・わり算」の「立式・計算」の現行指導は，つぎの３つの型が見出される：

A.「ペンキ塗り」――塀に見立てた長方形を分割操作
B.「長方形を１と見る」――１と見た長方形を分割操作
C.「*数直線*」――＜量/線分を１と見る＞でつくる比例図式を操作

ここで「３つの型が見出される」の意味は，「どれかの型が一つ択ばれ，そしてこれが一貫して用いられる」ではない。現前は，指導局面によってどれかの型が部分的に都合よく用いられるとか，これらの型が混在して用いられるというふうになっている。

(1)**「ペンキ塗り」型**

分数のかけ算・わり算の公式を導入する授業では，ペンキ塗りの文章題を用いるのが常套であった。
すなわち，この指導法では，分数のかけ算・わり算は＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞で説明される。そこで，＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞ができる素材が必要になる。そして，ペンキを塗る塀がそれだというわけである。

しかし，＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞は，分数のかけ算・わり算の文章題一般に使えない。――例えば，つぎの文章題には使えない：

「2/3 kg の 4/5 は何 kg か？」

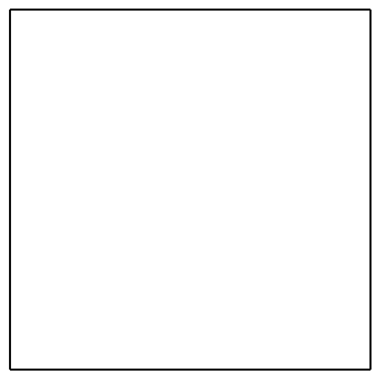
「2/3 kg は何 kg の 4/5 か？」

翻って，ペンキ塗りの文章題の解法をもって分数のかけ算・わり算の公式を説明することは，《一つの特殊を以て全てを説明したことにする》の騙しをやっていることになる。
教育的方便としては，これでよいこともある。
一方, 最初から「ペンキ塗り」とは別の型でやっていくことが考えられる。
現行では，「長方形を１と見る」型と「線分を１と見る」(「*数直線*」) 型がこの場合になる。

(2)**「長方形を１と見る」型**

ペンキ塗りの文章題を用いる指導法は，分数のかけ算・わり算を＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞で説明する。このときの長方形は，「ペンキが塗られる塀」のイメージである。しかし, このイメージを引き摺っていると，分数のかけ算・わり算の文章題一般に使えない。

そこで，＜タテ･ヨコ２方向に切る＞を行うための長方形を，「１と見る」を使って導入する：



：1と見る

そして，この「１と見た長方形」に対して，＜分数表現＞となる分割操作をしていく。

(3) **「数直線」型**

これは，つぎの方法である：

1.「数直線」の図として，「比例関係」の図式をつくる。
2. この図式の中で，一方の量の倍関係の図式を導く。
3. かけ算・わり算の式を，量の倍関係の図式に対する＜「比の３用法」の適用＞によって導く。
4. かけ算・わり算の計算のきまりも，同じ図式を用いて導き出す。

「数直線」型は，本テキストではなく，『「数直線でかけ算･わり算」は，わかるのがおかしい』で取り上げる。

2.2「わり算」導入に使う文章題は「第３用法」タイプ

文章題：

塀にペンキを塗る。 1 dL で 2/3 m^2 塗れると, 何 dL で 3/4 m^2 か?	塀にペンキを塗る。 1 dL で 何 m^2 塗れたら, 2/3 dL で 3/4 m^2 塗れるか?
ここに液体がある。 1 dL が 2/3 kg だと, 何 dL で 3/4 kg か?	ここに液体がある。 1 dL が 何 kg だと, 2/3 dL で 3/4 kg か?

は，左列が「比の第１用法」適用タイプ，右列が「比の第３用法」適用タイプである。
タイプの違いは，立式・計算の手順の違いに現れてくる。

特に，「比の第１用法」適用タイプは，計算が困難になる。
実際，「ペンキ塗り」型と「長方形を１と見る」型は，計算が＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞の操作ではできない。
また，「数直線」型は，計算の操作が複雑になる。

そこで，２タイプの文章題の扱いは，つぎのようになる：

1.「分数のわり算」の導入では，「比の第３用法」タイプの文章題を用いる。
2.「比の第１用法」適用タイプの文章題は，「形式不易の原理」で立式させ，割り算の公式で計算させる。

3「ペンキ塗り」型

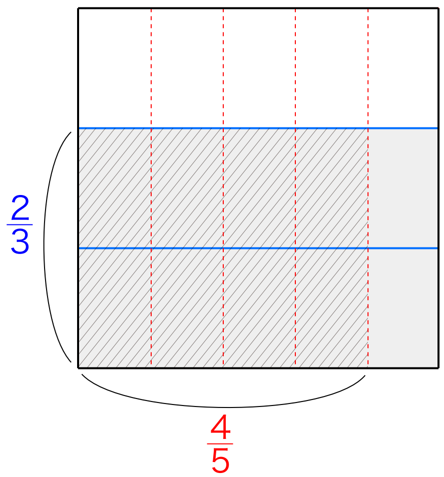
3.1「ペンキ塗り」型の文章題

分数のかけ算・わり算の公式を導入する授業では，ペンキ塗りの文章題を用いるのが常套であった。
すなわち，この指導法では，分数のかけ算・わり算は＜タテ・ヨコ２方向に切る＞で説明される。そこで，＜タテ・ヨコ２方向に切る＞ができる素材が必要になる。そして，ペンキを塗る塀がそれだというわけである。

分数のかけ算の問題は

「2/3 m^2 の 4/5 は何 m^2 か？」

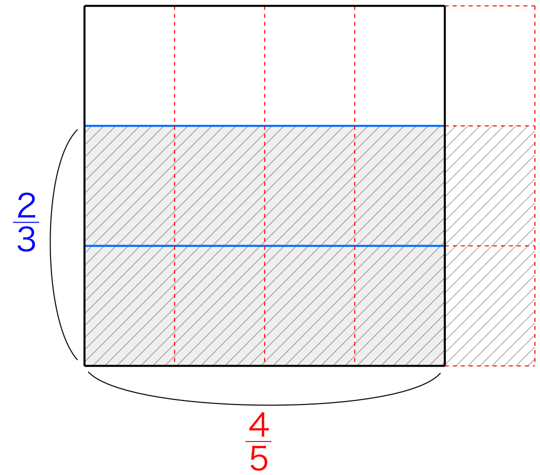
のようになり，面積が m^2 の長方形 (特に，m四方の正方形) を表した図に対しつぎの作図をして, 2/3 × 4/5 ＝ (2 × 4)/(3 × 5) を結論する:



また，分数のわり算の問題は

「2/3 m^2 は何 m^2 の 4/5 か？」

のようになり，つぎの作図をして，2/3 ÷ 4/5 ＝ (2 × 5)/(3 × 4) を結論する：



3.2 「かけ算」の立式と計算

「ペンキ塗り」型の「分数のかけ算」の授業は，つぎの流れになる：

1. つぎの文章題から始める：

「塀にペンキを塗る。
1 dL で 2/3 m^2 塗れる。
4/5 dL では何 m^2 塗れるか？」

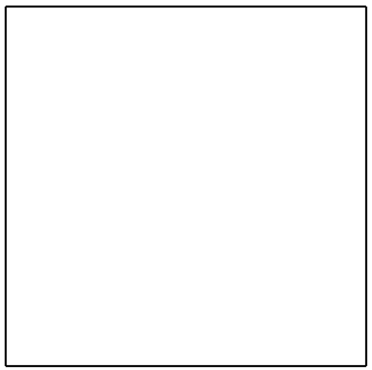
2. この問題がつぎの問題に還元されることを，生徒に受け入れさせる：

「2/3 m^2 の 4/5 は，何 m^2 か？」

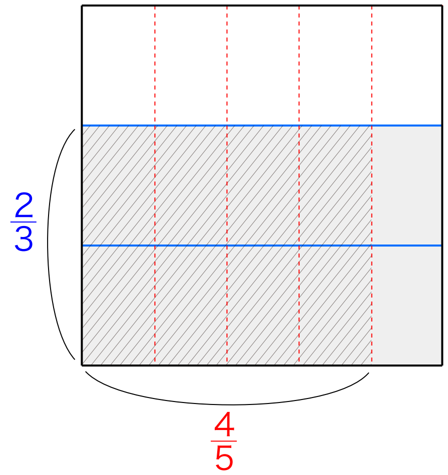
3. つぎの立式を，生徒に受け入れさせる：

(*)　何 ＝ 2/3 × 4/5

4. 面積が m^2 の長方形 (特に，m四方の正方形) を表す図を描く。



5.「何 m^2」としての「2/3 m^2 の 4/5」を，つぎのように作図する：



6. この図から，つぎの関係を読み取らせる：

(#)「何 m^2」＝「m^2 の (2 × 4)/(3 × 5)」

7. (*) と (#) から，つぎを結論する：

2/3 × 4/5 ＝ (2 × 4)/(3 × 5)

8. つぎのことばにまとめる：

「分数のかけ算は，分子同士かけたものを分子にし，分母同士かけたものを分母にする。」

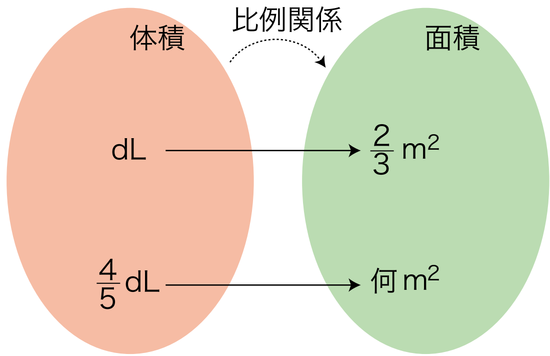
以上の手順を＜数学の推論＞として採点するならば，つぎの２つが減点される：

・ステップ２および３において，論証がない。

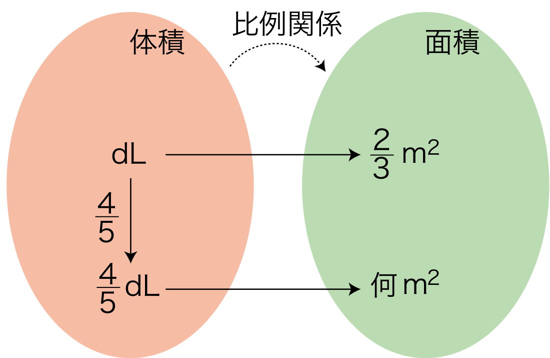
・ペンキ塗りの問題で得た式 (特殊) から, 分数の求積公式 (一般) を結論する。

なお, ステップ 2, 3 で抜かされている論証は, つぎのようになる：

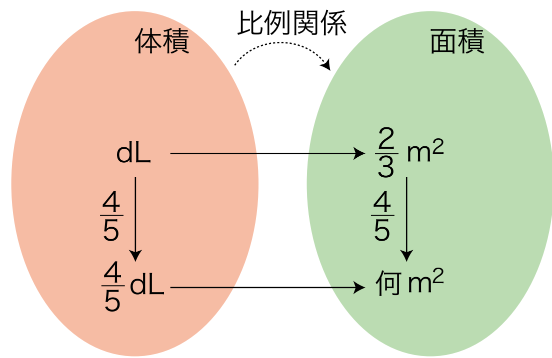
この文章題は, 比例関係の 対応の問題



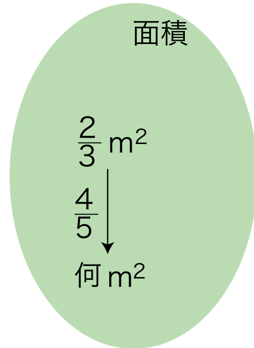
4/5 dL を分析



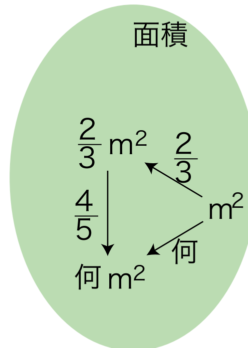
比例関係の 意味より, 4/5 倍には 4/5 倍が 応じる



最初の問題が この問題に 還元された



2/3m^2 と 何m^2 を 分析



× の文法から この式を得る

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \text{何}$$

3.3 「わり算」の立式と計算

「ペンキ塗り」型の「分数のわり算」の授業は，つぎの流れになる：

1. つぎの文章題から始める：

 「塀にペンキを塗る。
 4/5 dL で 2/3 m^2 塗れる。
 1 dL では 何 m^2 塗れるか？」

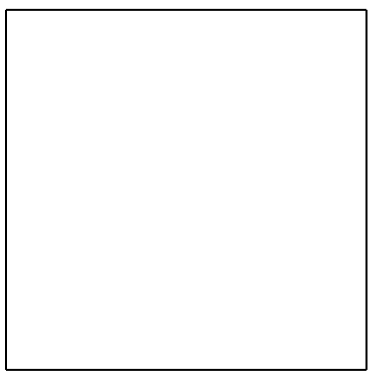
2. この問題がつぎの問題に還元されることを，生徒に受け入れさせる：

 「2/3 m^2 は，何 m^2 の 4/5 倍か？」

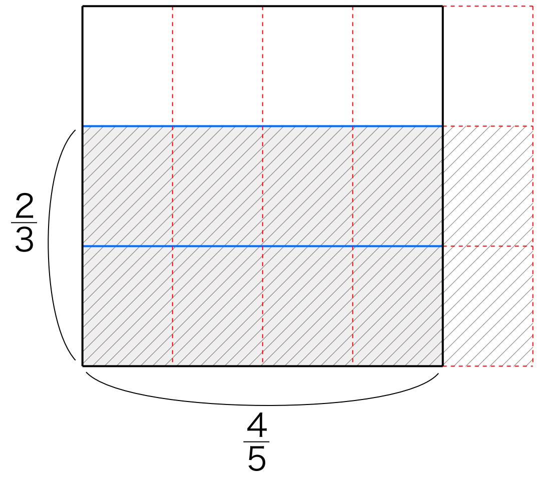
3. つぎの立式を，生徒に受け入れさせる：

 (∗)　何 ＝ 2/3 ÷ 4/5

4. 面積が m^2 の長方形 (特に，m四方の正方形) を表す図を描く。



5. 「2/3 m^2 は，何 m^2 の 4/5 倍」を，つぎのように作図する：



6. この図から，つぎの関係を読み取らせる：

 (#)「何 m^2」 ＝ 「m^2 の (2 × 5)/(3 × 4)」

7. (∗) と (#) から，つぎを結論する：

 2/3 ÷ 4/5 ＝ (2 × 5)/(3 × 4)

8. (2 × 5)/(3 × 4) ＝ 2/3 × 5/4 であることから，つぎを結論する：

 2/3 ÷ 4/5 ＝ 2/3 × 5/4

9. つぎのことばにまとめる：

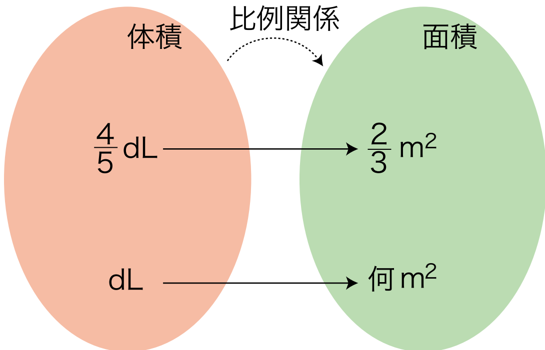
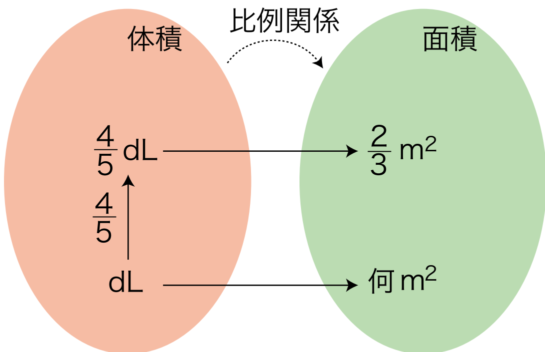
 「分数のわり算は,
 割られる方の分数に，割る方の分数をひっくり返してかける。」

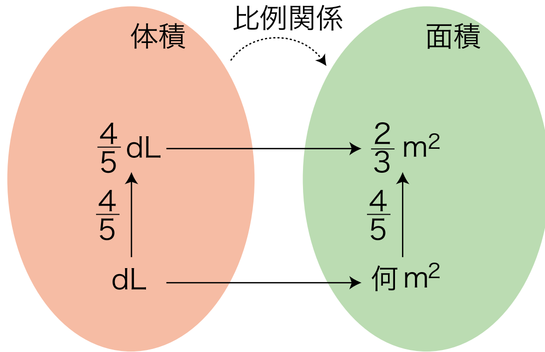
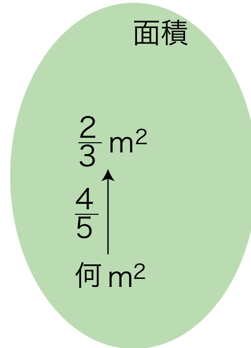
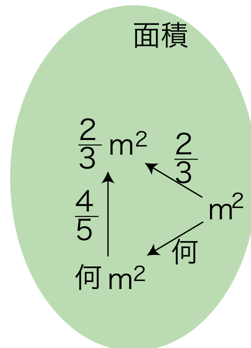
以上の手順を＜数学の推論＞として採点するならば，つぎの２つが減点される：

・ステップ２および３において，論証がない。

・ペンキ塗りの問題で得た式（特殊）から，分数の求積公式（一般）を結論する。

なお，ステップ２，３で抜かされている論証は，つぎのようになる：

この文章題は，比例関係の対応の問題	
4/5 dL を分析	

比例関係の意味より，4/5 倍には 4/5 倍が応じる	
最初の問題がこの問題に還元された	
$2/3m^2$ と何m2 を分析	
× の文法からこの式を得る	$何 \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$
÷ の文法からこの式を得る	$何 = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

ところで，上の文章題は，「分数のわり算」の文章題に２タイプあるうちの，一方のタイプのものである。
つぎが，もう一つのタイプである：

「塀にペンキを塗る。
1 dL で 4/5 m^2 塗れる。
何 dL で 2/3 m^2 塗れるか？」

「比の３用法」の言い方を用いるならば, 最初の文章題は「比の第３用法」タイプ，そしていま示した文章題は「比の第１用法」タイプである。そして，「比の第１用法」タイプの場合，長方形を分割するやり方は，使えない。
よって，「分数のわり算の立式・計算」を「ペンキ塗り」型で授業するときは，《文章題に「比の第１用法」タイプがあることを，生徒に対し隠す》を確信犯的にやることになる。

3.4「ペンキ塗り」型の構成

「分数のかけ算・わり算」の立式・計算を「ペンキ塗り」型で説明する方式は，つぎの構成になる：

1.「ペンキ塗り」の文章題を用い，塀に見立てた長方形の分割操作（＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞）によって，この文章題を解く。
2. この中で，「かけ算･わり算」の式とこの式の計算を現していく。

このとき，「分数のわり算」の導入に用いる比例関係の文章題は，つぎの２つのタイプのうち，「比の第３用法」適用タイプの方になる：

「比の第１用法」適用タイプ	「比の第３用法」適用タイプ
塀にペンキを塗る。 1 dL で 2/3 m^2 塗れると, 何 dL で 3/4 m^2 か?	塀にペンキを塗る。 1 dL で 何 m^2 塗れたら, 2/3 dL で 3/4 m^2 塗れるか?

「比の第１用法」適用タイプは，＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞の操作では解けないからである。

２タイプの文章題の扱いは，そこでつぎのようになる：

1.「分数のわり算」の導入では，「比の第３用法」タイプの文章題を用いる。
2.「比の第１用法」適用タイプの文章題は，「形式不易の原理」で立式させ，割り算の公式で計算させる。

さて，こうして「立式・計算」を済ませると，後は《「形式不易の原理」で立式させ，割り算の公式で計算させる》を「分数のかけ算・わり算」の文章題の解き方にする。
ペンキ塗りの文章題の解法を以て分数のかけ算・わり算の公式を説明することは,《一つの特殊を以て全てを説明したことにする》の騙しをやっていることになる。
翻って，「ペンキ塗り」型は，教育的方便としてこの騙しをよしとしているわけである。

4「長方形を１と見る」型

4.0　要旨

「ペンキ塗り」型は，塀のイメージをタテヨコ２方向に区分するはなしである。これは，長さ，重さ，時間のように＜タテヨコ２方向に区分＞が意味をもたない量には，使えない。
すなわち，つぎのような文章題には使えない：

「１秒に 2/3 m 進む。
　4/5 秒 では何 m 進むか？」

そこで，長さ，重さ，時間も扱える方法を，考えることになる。

現行の「分数のかけ算・わり算」には，つぎの二つの手法が見て取れる：

A.「長方形を１と見る」──１と見た長方形に分割操作
B.「数直線」──＜量/線分を１と見る＞でつくった比例図式を操作

この節では，「長方形を１と見る」の手法を，押さえる。

4.1 「かけ算」の立式と計算

「１と見る」型の「分数のかけ算」の授業は，つぎの流れになる：

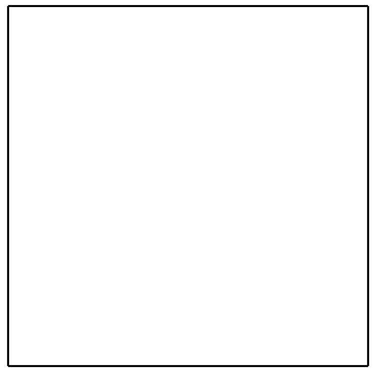
1. つぎの文章題から始める：

「１秒に 2/3 m 進む。
　4/5 秒 では何 m 進むか？」

2. つぎの立式を，生徒に受け入れさせる：

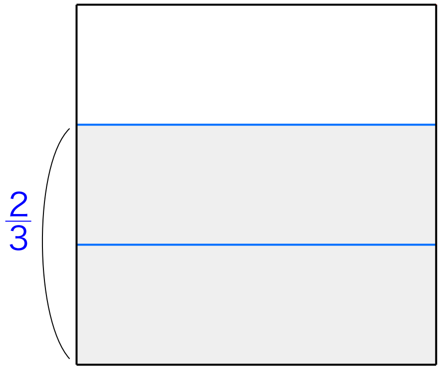
何 ＝ 2/3 × 4/5

3. 長方形（特に，正方形）を描き，「これを１と見ましょう」と生徒に言う──この言い回しを生徒に受け入れさせる：

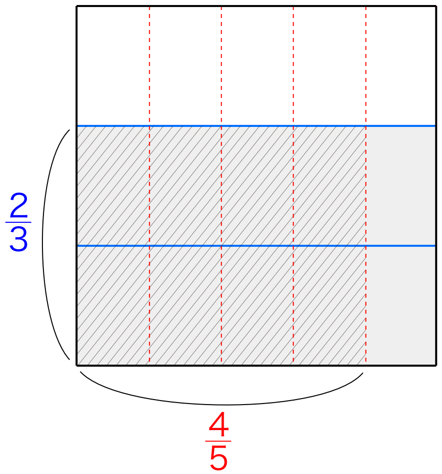


：1と見る

4.「何 ＝ 2/3 × 4/5」の「2/3」の方を，「１の 2/3」がこれの意味であるとして，つぎのように作図する：



5.「2/3 × 4/5」を，上に作図した「2/3」の 4/5 であるとして，つぎのように作図する：



6. この図から，「1 の 2/3 の 4/5 は，1 の (2 × 4)/(3 × 5)」を読み取らせる。
そして，つぎを結論する：

2/3 × 4/5 ＝ (2 × 4)/(3 × 5)

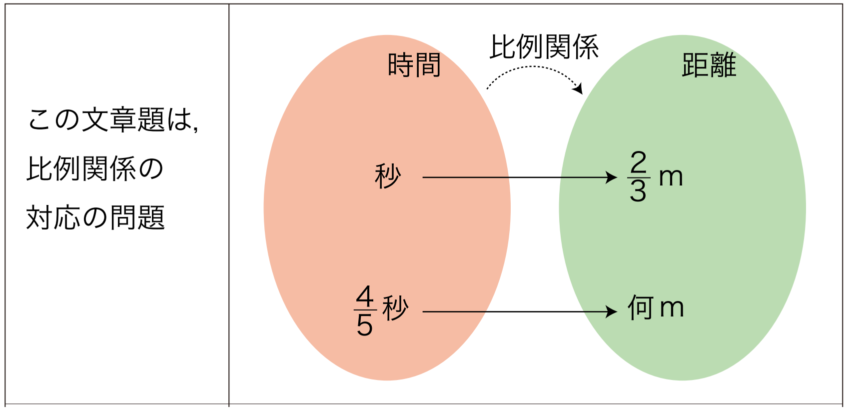
7. つぎのことばにまとめる：

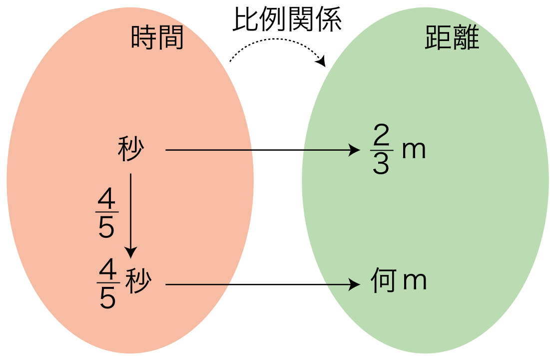
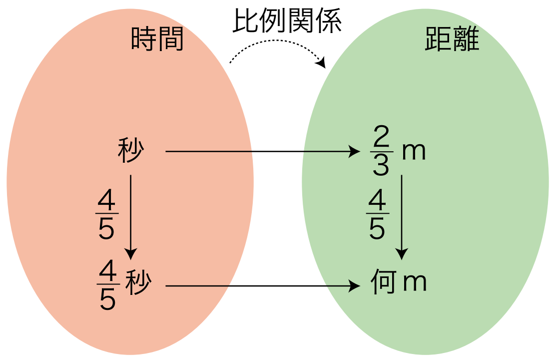
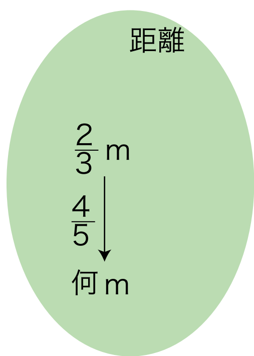
「分数のかけ算は,
分子同士かけたものが分子，分母同士かけたものが分母。」

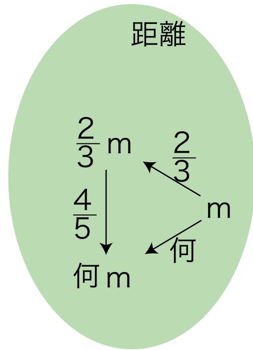
以上の手順を＜数学の推論＞として採点するならば，つぎの２つが減点される：

1. ステップ２において，論証がない。
2.「１と見る」を，説明しない。

ステップ２で抜かされている論証は，「ペンキ塗り」型のところで示したものと同様である。すなわち，つぎのようになる：



4/5 秒を分析	
比例関係の意味より，4/5 倍には 4/5 倍が応じる	
最初の問題がこの問題に還元された	

2/3m と何m を分析	
× の文法からこの式を得る	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} =$ 何

また，ここに出てきた「１と見る」は，「面積と＜量としての数＞の間に同型を立てる」の意味になる：

(N, ＋, ×) を，分数 (系) とする。
面積 (($Q_{面積}$, ＋), ×, (N, ＋, ×)) と＜量としての数＞ ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の間の同型で，＜描いた長方形の面積＞に１が対応するものを立てる。 ——これは，つぎの対応になる：

$$\text{＜描いた長方形の面積＞}_{\times}\ n \longmapsto n \qquad (n \in N)$$

(→ §「量」の数学 (『学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要』))

4.2 「わり算」の立式と計算

「１と見る」型の「分数のわり算」の授業は，つぎの流れになる：

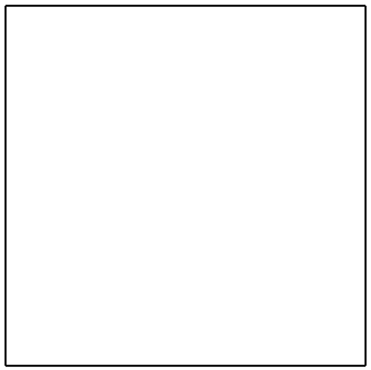
1. つぎの文章題から始める：

「4/5 秒に 2/3 m 進む。
１秒では 何 m 進むか？」

2. つぎの立式を，生徒に受け入れさせる：

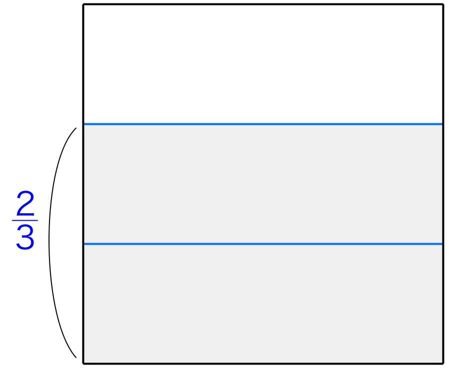
何 ＝ 2/3 ÷ 4/5

3. 長方形（特に，正方形）を描き，「これを１と見ましょう」と生徒に言う──この言い回しを生徒に受け入れさせる：

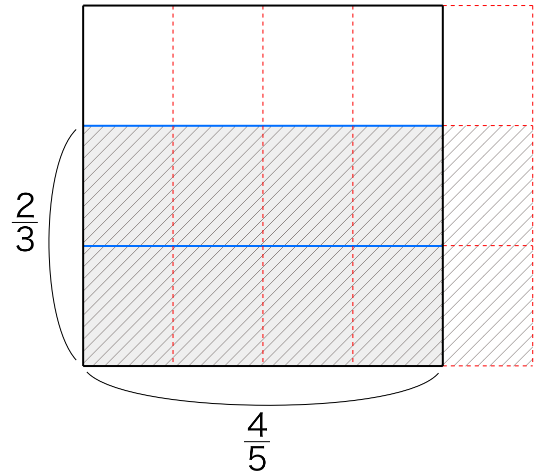


：1と見る

4.「2/3 ÷ 4/5」の「2/3」を,「１の 2/3」がこれの意味であるとして，つぎのように作図する：



5.「2/3 ÷ 4/5」を「2/3 は何の 4/5 か？」と読ませ，「2/3 は，何 の 4/5」をつぎのように作図する：



6. この図から，「１の 2/3 は，１ の (2 × 5)/(3 × 4) の 4/5」を読み取らせる。
そして，つぎを結論する：

2/3 ÷ 4/5 ＝ (2 × 5)/(3 × 4)

7. (2 × 5)/(3 × 4) ＝ 2/3 × 5/4 であることから，つぎを結論する：

2/3 ÷ 4/5 ＝ 2/3 × 5/4

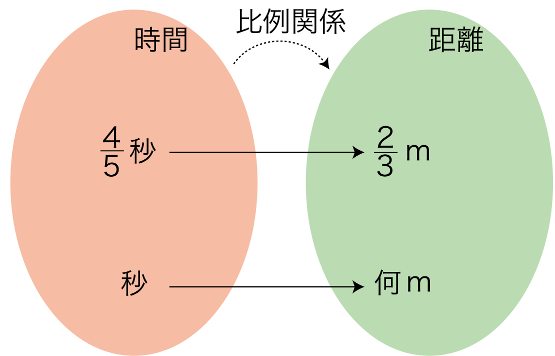
8. つぎのことばにまとめる：

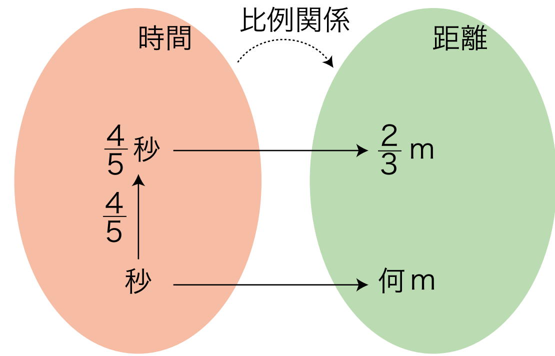
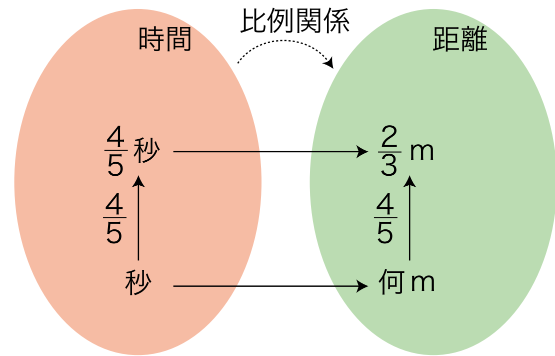
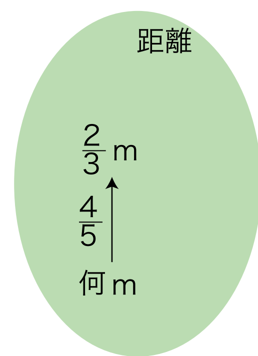
「分数のわり算は，
割られる方の分数に，割る方の分数をひっくり返してかける。」

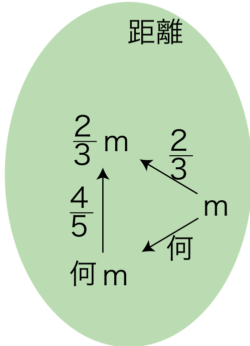
以上の手順を＜数学の推論＞として採点するならば，つぎの２つが減点される：

1. ステップ２において，論証がない。
2. 「１と見る」を，説明しない。

ステップ２，３で抜かされている論証は，「ペンキ塗り」型のところで示したものと同様である。すなわち，つぎのようになる：

この文章題は， 比例関係の 対応の問題	

4/5 秒を分析	
比例関係の 意味より， 4/5 倍には 4/5 倍が 応じる	
最初の問題が この問題に 還元された	

2/3m と 何m を 分析	
× の文法から この式を得る	$何 \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$
÷ の文法から この式を得る	$何 = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

また，「１と見る」は，§「かけ算」の立式と計算 で説明したものと同じである。

ところで，上の文章題は，「分数のわり算」の文章題に２タイプあるうちの，一方のタイプのものである。
つぎが，もう一つのタイプである：

「1 秒に 4/5 m 進む。
何秒で 2/3 m 進むか？」

「比の３用法」の言い方を用いるならば, 最初の文章題は「比の第３用法」タイプ，そしていま示した文章題は「比の第１用法」タイプである。そして，「比の第１用法」タイプの場合，長方形を分割するやり方は，使えない。

よって，「分数のわり算の立式・計算」を「１と見る」型で授業するときは,《文章題に「比の第１用法」タイプがあることを, 生徒に対し隠す》を確信犯的にやることになる。

4.3「長方形を１と見る」型の構成

「分数のかけ算・わり算」の立式・計算を「長方形を１と見る」型で説明する方式は，つぎの構成になる：

1. 比例関係の文章題に対し，「比の３用法」と「形式不易の原理」を適用する形で，立式する。
2. 長方形を描き，これに対し「１と見る」を言う。
3. 式の計算として，この長方形の分割操作（＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞）をする。

このとき，「分数のわり算」の導入に用いる比例関係の文章題は，つぎの２つのタイプのうち，「比の第３用法」適用タイプの方になる：

「比の第１用法」適用タイプ	「比の第３用法」適用タイプ
ここに液体がある。 1 dL が 2/3 kg だと, 何 dL で 3/4 kg か?	ここに液体がある。 1 dL が 何 kg だと, 2/3 dL で 3/4 kg か?

「比の第１用法」適用タイプは，＜長方形をタテ・ヨコ２方向に切る＞の操作では解けないからである。

２タイプの文章題の扱いは，そこでつぎのようになる：

1. 「分数のわり算」の導入では，「比の第３用法」タイプの文章題を用いる。
2. 「比の第１用法」適用タイプの文章題は，「形式不易の原理」で立式させ，割り算の公式で計算させる。

翻って，「長方形を１と見る」型は，《「わり算」の立式・計算の説明において，「比の第１用法」適用タイプの文章題を隠す》を，教育的方便として，よしとしているわけである。

おわりに

小学算数において，「分数のかけ算・わり算」の授業は，困難な授業の最たるものである。そして，授業者は，授業の困難の理由を捉え損ねる。

すなわち，「分数のかけ算・わり算」の授業の困難の核心は，学校数学の「分数のかけ算・わり算」が，＜喩え話＞（「１と見る」「形式不易の原理」）と＜こじつけ＞（循環論法）で構成するふうであって，数学になっていないことにある。
このことを捉えられるためには，数学の「分数のかけ算・わり算」がわからねばならない。
しかし，授業者は，数学の「分数のかけ算・わり算」を知らない。
そこで，授業者は，授業の困難の理由を捉え損ねる。
授業の困難の理由を，自分の力不足や，生徒の力不足に帰すわけである。

生徒の方も，学習の困難を自分の力不足に帰す。

学校で授業されている「分数のかけ算・わり算」は，学校数学の「分数のかけ算・わり算」である。数学の「分数のかけ算・わり算」ではない。
学校で授業されている「分数のかけ算・わり算」が学校数学の「分数のかけ算・わり算」であるとわかるためには，数学の「分数のかけ算・わり算」がわからねばならない。
そこで，本論考を以て，つぎのことをしようとした：

　数学の「分数のかけ算・わり算」を示し，
　これと対比する形で，学校数学の「分数のかけ算・わり算」を示す。

本論考は，「分数のかけ算・わり算」の授業の困難を除くためのものではない。
困難が何かを理解するためのものである。
「分数のかけ算・わり算」の数学との対比を論考の形にしているが，それはこの数学の理解が，授業の困難が何かの理解そのものになるからである。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

『「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ』

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

「数」の数学と学校数学 (4)

「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ

2012-04-12　更新・標題変更
(旧題：『「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学』)
2012-02-18　更新
2012-02-07　初版アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp