図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための

「数」の数学 対 学校数学 (6)

「構成」知らずの勇み足：
「比例」の現行定義 の場合

Ver. 2014-05-19

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」の数学 対 学校数学 (6)

「構成」知らずの勇み足：「比例」の現行定義 の場合

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている

「構成」知らずの勇み足：「比例」の現行定義の場合

を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は，「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの，＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの６になるものです。

「「数」の数学対学校数学」シリーズの趣旨は, 読者が学校数学の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは，「「数」がわかる本」シリーズに後続する内容になっています。
学校数学の「数」は，数学の「数」とは違っています。特に，学校数学の「数」は, 数学になっていません。学校数学の「数」に対するときは, このことを理解している必要があります。そして, このことの理解には, 数学の「数」の理解が含まれるわけです。

「「数」がわかる本」シリーズは，現在かなり大部になっています。そこで，この内容の＜早わかり＞としてつぎのテクストを用意していますので，利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

＜「数」がわかる本＞シリーズ （数学の「数」）

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズ （イデオロギーの「数」）

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？—学校数学の「量」
- 学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要
- 「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ
- 「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい
- 「構成」知らずの勇み足：「比例」の現行定義の場合
（本テクスト）

＜「かけ算の順序」論争解説＞シリーズ （モンスターの「数」）

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

序

「*かけ算に順序はない*」の物言いがある。
学校数学のかけ算を，順序のないものにしようというわけである。
（→『「かけ算の順序」の数学とイデオロギーとモンスター』）

「*かけ算に順序はない*」は，「構成」の概念をもたないことが原因でやってしまう勇み足の一例である。
「*かけ算に順序はない*」は，「かけ算は可換」を先取りしている（「論点先取」）。

実際，意味ないし規則の明示を以て積の２項の順序が定められているからこそ，可換 / 非可換のはなしとなる。
意味ないし規則を以て式を定めるプロセスが先ずあって，２項の順序を逆にした２つの式が同じ値であるかどうかのはなしになる。
可換 / 非可換は，順序の定義の含意 (implication) として，定理の形で述べることになるものである。
順序があって，可換 / 非可換である。
かけ算には順序がある。
当たり前のことである。

しかし「当たり前」は，「構成」の概念を訓練されていて，言えることである。
「構成」の概念をもたない者には，このロジックがそもそも意識の対象にならない。 論じるものにならない。
（→「かけ算の順序」のモンスター）

《「構成」の概念をもっている・いない》は，学校数学の現前の捉えにおいて，重要な視点の一つになる。
実際，ふつうなのは，《もっていない》の方であって，《もっている》の方ではない。
そこで,「構成」の概念をもたないことが原因の勇み足を目にするときは,それはふつうに出てくるものだと達観してかかることになる。

さて，ここに「比例」の現行定義がある。
これも，＜「構成」の概念をもたないことが原因の勇み足＞の例になるものである。

「比例」の現行指導は，「比例関係」と「ｙ＝ａｘ」を，２量の対応表を横に見るか縦に見るかの違いとして，同列に並べるものになっている。
「*比例関係と ｙ＝ａｘ に先後の順序はない*」というわけである。
こうなってしまうのは，「単位の固定」を最初にもってくるからである。
数学だと，「比例関係 → 単位の固定→ ｙ＝ ａ ｘ」の順になり，「*比例関係と ｙ＝ａｘ には先後の順序がある*」となる。

「比例」の現行指導内容は，授業者もこれを「比例」の内容だとして学習する。
これは，＜数学を知らない＞が学校数学に蔓延・固定する構造である。
一般に，学校数学はこんなふうにして数学を無くしていく。

ちなみに，学校数学が「*かけ算に順序はない*」になるのも，時間の問題であるように見える。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

要約

「比例」の数学の構成は,

比例関係　→　単位の固定　→　ｙ＝ａｘ

である。
これに対し，現行は「単位の固定」を最初にもってくる。
そしてこのとき,「比例関係」と「ｙ＝ａｘ」は２量の対応表を横に見るか縦に見るかの違いのことになり，同列に並ぶ：

単位の固定　→　比例関係
　　　　　　　　ｙ＝ａｘ

現行のこの構成は,「数学における構成」の概念をもたないこと──結局 ,《数学知らず》──が原因である。

学校数学では,「構成」の概念をもたないことが原因の勇み足が，容易に出てくる。
個人の思いつき（自分が「こうだ」と思うこと）が「現行」にまで進んでしまう構造が，学校数学にはある。

さらに,「現行」は，後から来る者には「所与」になり「本当」になる。
現行の構成が，数学だと思われる。

「比例」の現行定義は，この (1)「構成」の概念をもたないことが原因の勇み足と，(2) 後から来る者にはこれが「数学」になるという問題を，表している。

はじめに

学校教育は，生徒に合わせた指導の内容と方法になる。
数学を生徒に教えようとするとき，数学を生徒仕様にする。
この「生徒仕様の数学」が，学校数学であり，特に算数科である。

「数学を算数科の内容にする」は，「数学をやさしくする」ではない。
もうそうなら，数学は，やさしくできるものを無理矢理難しくしていることになる。
「数学を算数科の内容にする」には，「別物にする」がある。

数学は論理的構成を行う (構成主義)。
論理的構成は，人の自然 (生理) が苦手とするものである。
「別物にする」の内容は，人の自然が受け付けられるほどに論理的構成を崩すことである。

論理的構成を崩した結果は，指導内容が論理矛盾や意義欠損を含むことである。
しかしこれは，「授業に乗せられるようにする」の含蓄であり，受容することである。

但し，数学を知っていて，この受容がある。
現実は，授業者も現行指導内容から学ぶ者である。
この場合，数学に向かう契機が無い。
《数学疎遠・数学無視──数学知らず》の構図に嵌まっている。

授業者は，「受容」を心得ていない者として，論理矛盾や意義欠損が理由の指導困難の場面で，対応を間違うことになる。
即ち，無用に悪戦苦闘し，あらぬ方向に行ってしまう。

こういうわけで，本来なら，つぎのようになる：

1. 授業者は，「学校数学と数学の違い・隔たり」の概念を持つ者でなければならない。
2. 指導の前には，指導がいかにして「生徒仕様」であるかの押さえとして，指導内容と数学の違い・隔たりの押さえがある。

特に，数学と学校数学の違い・隔たりが大きい場合，それは論理矛盾や意義欠損が大きいことであるから，数学の押さえの弱さは指導の不成立に直結する。

現行の「比例」指導は，以上論じた視点から見ていくところとなる。
実際，「比例」は，現状で，数学と学校数学の違い・隔たりの大きい主題ということになる。

いま，「比例」の現行指導は，「比例関係」と「ｙ＝ａｘ」を，２量の対応表を横に見るか縦に見るかの違いとして，同列に並べるものになっている。
こうなってしまうのは，「単位の固定」を最初にもってくるからである。
一方数学だと，「比例関係 → 単位の固定→ ｙ＝ ａ ｘ」の構成になる。

「比例」の現行指導内容は，授業者もこれを「比例」の内容だとして学習する。

《数学知らず》の構図に嵌まっている。
この《数学知らず》が敷延・固定することは，学校数学から「比例」の数学が完全に無くなることである。
そこで，「比例」の数学の再確認作業が必要になる。
本論考は，これを行う。

なお，「比例」の数学の押さえは，「比例」の現行指導内容と対照する形が，わかりやすくそして実際的である。
本論考はこのように構成する。

1.「比例」の数学

1.1「量」の数学

「比例」は，２量の間の関係である。「比例」の数学は,「量」の数学がもとになる。
そこで,「量」の数学の押さえを，先ず行う。
但し，本論考に必要な分だけということで，できるだけ容易な押さえにする。

いま,「量」として「長さ」を考える。
「長さ」のことばは，日常的につぎの２通りに用いられている：

A. １つの量カテゴリーとしての長さを指す (例 :「長さと重さ」)
B. 個々の長さを指す (例 :「長さ２cm」)

これに対し,「長さ」を数学にするときは，つぎの３つの「長さ」を区別することになる：

1. 系としての長さ (「長さ(系)」)
2. 集合としての長さ (「長さ(集合)」)
3. 長さ(集合) の要素としての長さ (「長さ(要素)」)

日常的用法の A，B には，それぞれ長さ(系) と長さ(要素) が対応する。

長さの計算には, 長さ(要素) 同士の和と, 長さ(要素) に対する数の倍 (作用) がある。
前者は算法として「加法」と呼ばれ，構造的に「内算法」である。
対して，数の倍作用は「外算法」である。
長さ(要素) の **q** と **q**′ の和を「**q＋q**′」で，そして長さ(要素) **q** と数 n に対する **q** の n 倍を「**q** $_{\times}$ n」で，それぞれ表すことにする。

ここで,「数」も，系，集合，要素の３つを区別することになる。
例えば，長さを倍する数として正の実数を考えるときは,「正の実数」につぎの３つを区別することになる：

1. 系としての正の実数 (「正の実数(系)」)
2. 集合としての正の実数 (「正の実数(集合)」)
3. 正の実数(集合) の要素としての正の実数 (「正の実数(要素)」)

また, 数では, ２つの内算法「加法 (＋)」「乗法 (＋)」が考えられている。
そして，つぎが数(系) である：

(数(集合), ＋ , ×)

最後に，つぎが長さ(系) である：

((長さ(集合), ＋), ×, (数(集合), ＋ , ×))

ここで，系の中に含まれる４つの算法がどのように関係するかを簡単に見るために,「２ｍの棒と３ｍの棒５本をつないだ長さの計算」を示す：

「２ｍ」**＋**（「３ｍ」$_{\times}$ ５）
＝（「ｍ」$_{\times}$ ２）**＋**（（「ｍ」$_{\times}$ ３）$_{\times}$ ５））
＝（「ｍ」$_{\times}$ ２）**＋**（「ｍ」$_{\times}$（３ × ５））
＝「ｍ」$_{\times}$（２ ＋（３ × ５））
＝「ｍ」$_{\times}$ 17
＝「17 ｍ」

1.2「比例」の数学

「比例」は，「２量の間の比例関係」のことであり，これはつぎの言い回しで定義される：

「２量の間の対応関係で，
一方の２倍，３倍，‥‥に他方の２倍，３倍，‥‥が対応する」

この定義は，一見，有理数倍および実数倍を欠く不完全な定義に見える。しかし実際には，有理数および実数○に対する「一方の○倍に他方の○倍が対応」がこの定義から導かれるので，定義として問題ない (証明は数の拡張に乗せていくものである[註])。

いま，ｆ：$量_1$ → $量_2$ を比例関係とする。
「一方の○倍に他方の○倍が対応」は，式で書くとつぎのようになる：

$$f(\mathbf{q} \times n) = f(\mathbf{q}) \times n \quad (\mathbf{q} \in 量_1,\ n：数)$$

つぎのステージは，$量_1$，$量_2$ それぞれにおいて，単位 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$ を固定することから開始される。

$量_1$ の任意の要素 $\mathbf{q}_1$ は，$\mathbf{u}_1$ の何倍の形に書ける：

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{u}_1 \times n_1$$

これを，つぎのように言っているわけである：

「単位 $\mathbf{u}_1$ に対する $\mathbf{q}_1$ の (測定) 値は，n_1」

$量_2$ の場合も同様である。
そこで，ｆ：$量_1$ → $量_2$ からは，数値の対応が導ける。

この対応を φ(ファイ) とする：

$$\phi：数 \to 数$$

さて，ｆには「一方の○倍に他方の○倍が対応」のきまりがある。
そこで，「*ｆから導かれる φ にも何かきまりが見出されるはずだ*」と考えるのは，自然である。
そして，きまりを求めてみると，「一定数倍」が求まる：

$$\phi：n \longmapsto n \times a$$

ａは，$f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) \times a$ となる数である。
これが，学校数学の「ｙ＝ａｘ」であり，ａを「比例定数」と呼ぶ。

「ｙ＝ａｘ」の要点は，つぎの２つである：

1.「ｙ＝ａｘ」は，数と数の間の対応
　(Cf.「比例関係」は，量と量の間の対応)
2.「比例定数」ａは，２量での単位の取り方に依存

そして，以上の内容は「線型空間」の数学と対比できるものになる：

1.「量」は，「線型空間」と対応
2.「比例関係：$量_1$ → $量_2$」は，「線型写像：$線型空間_1$ → $線型空間_2$」と対応
3.「単位 $\mathbf{u}$」は，「基底Ｕ＝ ($\mathbf{u}_1$, ‥‥, $\mathbf{u}_n$)」と対応
4.「単位 $\mathbf{u}$ に対する量 $\mathbf{q}$ の (測定) 値」は，「基底Ｕに対するベクトル $\mathbf{v}$ の座標」と対応
5.「$量_1$ の単位 $\mathbf{u}_1$，$量_2$ の単位 $\mathbf{u}_2$ に対し比例関係ｆ：$量_1$ → $量_2$ から導かれる比例定数」は，「$線型空間_1$ の基底 $_{21}$，$線型空間_2$ の

基底U$_2$ に対し線型写像 f ：線型空間$_1$ → 線型空間$_2$ から導かれる行列 (「f の表現行列」)」と対応

実際，この対比は，実数係数の「量」と「1 次元線型空間」が同じものになることに因っている。
(そして実数係数では，「比例定数 a」は「1 × 1 行列 (a)」と同じ！)

→「数」の意味のシフト (『「数とは何か？」への答え』)

量論と線型空間論の交差

量論

線型空間論

実線型空間

$$
\begin{tikzcd}
((\mathbb{N},+),\times,(\mathbb{N},+,\times)) \arrow[r] \arrow[d] & ((\mathbb{Z},+),\times,(\mathbb{Z},+,\times)) \arrow[d] & & \\
((\mathbb{Q}^+,+),\times,(\mathbb{Q}^+,+,\times)) \arrow[r] \arrow[d] & ((\mathbb{Q},+),\times,(\mathbb{Q},+,\times)) \arrow[d] & & \\
((\mathbb{R}^+,+),\times,(\mathbb{R}^+,+,\times)) \arrow[r] & ((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & ((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[r, equal] \arrow[d] & ((\mathbb{R},+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
& ((\mathbb{C},+),\times,(\mathbb{C},+,\times)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[dd] & (\boxed{(\mathbb{R}^2,+)},\times,(\mathbb{C},+,\times)) \arrow[dd] & (\boxed{(\mathbb{R}^2,+)},\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[l, bend right] \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
& & & ((\mathbb{R}^3,+),\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
& ((\mathbb{H},+),\times,(\mathbb{H},+,\times)) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (\boxed{(\mathbb{R}^4,+)},\times,(\mathbb{H},+,\times)) & (\boxed{(\mathbb{R}^4,+)},\times,(\mathbb{R},+,\times)) \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}
$$

註． 以下に，「一方の２倍， ３倍， ‥‥に他方の２倍， ３倍， ‥‥が対応する」から， 整数， 有理数， 実数係数での「一方の○倍に他方の○倍が対応」が導かれることを示す。

先ず，つぎのことに留意する (『「数とは何か？」への答え』)：

量の系 ((Q , **＋**), $_\times$, (N , ＋ , ×)) は, ((N , ＋), ×, (N , ＋ , ×)) と同型に立てられる。

即ち， Q は **0** でない **u**∈Q に対する { **u** $_\times$ n ｜ n∈N} の形になり，つぎの対応が ((N , ＋), ×, (N , ＋ , ×)) と ((Q , **＋**), $_\times$, (N , ＋ , ×)) の間の同型になる：

$$n \longmapsto \mathbf{u}\ _\times n \quad (n \in N)$$

Nが負数をもつ数 (e.g. ℤ, ℚ, ℝ) の場合，各q∈ Q には対称元 －**q** がある。さらに，つぎが成り立つ：

$$\mathbf{q}\ _\times\ n = (-\mathbf{q})\ _\times (-n)$$

証明：

q＝**u** $_\times$ a とする。

q $_\times$ n＝**u** $_\times$ (a × n)。

a × nと －(a × n) は, 互いに対称元。 そこで, **u** $_\times$ (a × n) と **u** $_\times$ (－(a × n)) は，対称元。

また， **u** $_\times$ (－(a × n)) と (－**u**) $_\times$ (－(a × n)) は，足して０になるので，対称元。

そして，

$$(-\mathbf{u})\ _\times (-(a \times n)) = ((-\mathbf{u})\ _\times a)\ _\times (-n)$$
$$= (-(\mathbf{u}\ _\times a))\ _\times (-n) = (-\mathbf{q})\ _\times (-n)$$

結局， **q** $_\times$ n＝(－**q**) $_\times$ (－n)

量の系 ((Q_1, **＋**), $_\times$, (N , ＋ , ×)), ((Q_2, **＋**), $_\times$, (N , ＋ , ×)) と関数 f ：$Q_1 \rightarrow Q_2$ において，つぎが成り立っているとする：

$$f (\mathbf{q}\ _\times\ n) = f (\mathbf{q})\ _\times\ n \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

但し， Nが０をもつ数のときは，つぎを条件にする：

1. f (**q** $_\times$ n) ＝ f (**q**) $_\times$ n　(n＝0, 1, 2, 3, ‥‥)
2. (「非退化」)
   f (**0**) ＝ **0**，かつ f (**q**) ＝ **0** となる **q** は **0** に限る。

つぎが成り立つ：

1. f は１対１
2. f (－**q**) ＝ －f (**q**)

証明：

1. f (**q**) ＝ f (**q**′) とする。

q ＝**u** $_\times$ a， **q**′＝**u** $_\times$ a′ とすると,

f (**q**) $_\times$ a′
＝f (**u** $_\times$ a) $_\times$ a′
＝f (**u**) $_\times$ (a × a′)
＝f (**u** $_\times$ a′) $_\times$ a
＝f (**q**′) $_\times$ a
＝f (**q**) $_\times$ a

よって， a′＝a。

結局， **q** ＝**q**′。

2. $f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})_{\times} n$ とする。

$f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})_{\times} n = f(\mathbf{q}_{\times} n)$ より，$-\mathbf{q} = \mathbf{q}_{\times} n$。

よって $n = -1$。

$f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})_{\times} n = f(\mathbf{q})_{\times}(-1) = -f(\mathbf{q})$。

以上の準備のもと，これより本題の証明に入る。

(1) Nが整数の場合

$f(\mathbf{q}_{\times}(-2)) = f(\mathbf{q})_{\times}(-2)$ を示す：

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{q}_{\times}(-2)) \\
&= f((-\mathbf{q})_{\times} 2) \\
&= f(-\mathbf{q})_{\times} 2 \\
&= (-f(\mathbf{q}))_{\times} 2 \\
&= f(\mathbf{q})_{\times}(-2)
\end{aligned}
$$

(2) Nが分数 (正の有理数) の場合

$f(\mathbf{q}_{\times} 2/3) = f(\mathbf{q})_{\times} 2/3$ を示す：

$\mathbf{q}_{\times} 2/3 = \mathbf{q}'$ とする。

これは，つぎの条件を満たす $\mathbf{c} \in Q_1$ が存在するということ：

$\mathbf{c}_{\times} 3 = \mathbf{q}$

$\mathbf{c}_{\times} 2 = \mathbf{q}'$

「Nが自然数の場合」に還って，

$f(\mathbf{c})_{\times} 3 = f(\mathbf{c}_{\times} 3) = f(\mathbf{q})$

$f(\mathbf{c})_{\times} 2 = f(\mathbf{c}_{\times} 2) = f(\mathbf{q}')$

そしてこれは，$f(\mathbf{q})_{\times} 2/3 = f(\mathbf{q}')$ ということ。

(3) Nが実数の場合

$f(\mathbf{q}_{\times} \pi) = f(\mathbf{q})_{\times} \pi$ を示す：

$\{n_k \mid k = 1,2,\cdots\}$ を，π を定める有理数の Cauchy 列とする。

先ず，$\{\mathbf{q}_{\times} n_k \mid k = 1,2,\cdots\}$ が，Q_1 における Cauchy 列になり，これより $\{f(\mathbf{q}_{\times} n_k) \mid k = 1,2,\cdots\}$ が，Q_2 における Cauchy 列になる。 そして，これが定める Q_2 の要素は $f(\mathbf{q} \times \pi)$。

また，Cauchy 列 $\{f(\mathbf{q}_{\times} n_k) \mid k = 1,2,\cdots\}$ は，「Nが有理数の場合」に還って，$\{f(\mathbf{q})_{\times} n_k \mid k = 1,2,\cdots\}$ であり，そして，$\{f(\mathbf{q})_{\times} n_k \mid k = 1,2,\cdots\}$ が定める Q_2 の要素は $f(\mathbf{q})_{\times}\pi$。

よって，$f(\mathbf{q}_{\times} \pi) = f(\mathbf{q})_{\times} \pi$。

1.3「比例」の数学に準ずる「比例」指導の流れ

ここで，「比例」の現行指導内容との対照として，「比例」の数学に沿って授業を構成したらどういうふうになるかを示してみる。
行うことは，授業をつぎの順序に構成することである：

1.「比例関係」
  (1)「比例関係」の導入
  (2)「比例関係」の外延
2.「ｙ＝ａｘ」
  (3) 単位の導入，数値の対応
  (4) 数値の対応のきまり
  (5)「比例定数」

各項目に対応する授業イメージを，教師 (T) と生徒 (P) のことばを用いて，以下に書いてみる。

(1)「比例関係」の導入

T.「等速」ってどういうことだろう？
P.　同じ時間に同じ距離。
T.　時間が２倍だと？
P.　距離が２倍。
P.　時間が３倍だと，距離も３倍。
T.　逆に「時間が２倍，３倍，････のとき距離も２倍，３倍，････だったら等速」と言える？
P.「同じ時間に同じ距離」になっている。言える。
T.　２つの量の間の関係で，一方が２倍，３倍，････のとき他方も２倍，３倍，････の関係を，「比例関係」という。

註：２つの表現「*同じ時間に同じ距離*」と「*時間が２倍，３倍，････のとき距離も２倍，３倍，････*」の関係は，つぎのようになる。
「*同じ時間に同じ距離*」は，これより，時間→距離の関数ｆが立つことになる。さらにこの表現の背後には「*２つの時間を合わせた時間には，２つの時間それぞれで移動した距離を合わせた距離だけ移動する*」がある。よって，「*同じ時間に同じ距離*」は，「$f(q+q')=f(q)+f(q')$」になる。
一方，「*時間が２倍，３倍，････のとき距離も２倍，３倍，････*」は，「$f(q\times n)=f(q)\times n$」である。
そして，「$f(q+q')=f(q)+f(q')$」と「$f(q\times n)=f(q)\times n$」は，有理数，実数への拡張も含め，同値になる（証明は数の拡張に乗せていくものである(註)）。

(2)「比例関係」の外延

T.「等速」を「時間と距離の比例関係」と見られるようになった。
T.　２量の比例関係（「一方が２倍，３倍，････のとき他方も２倍，３倍，････」）として見ることのできるものは，他には？
P.　針金の「均質」(「長さが２倍，３倍，････のとき重さも２倍，３倍，････」)
P.　水道の蛇口からの水の出方の「一様」(「時間が２倍，３倍，････のとき嵩も２倍，３倍，････」)

(3) 単位の導入，数値の対応

T.「等速」を「時間と距離の比例関係」と見られるようになった。

この度は，時間と距離の単位を決めて，時間と距離の対応を，時間の単位何倍と距離の単位何倍の対応で表せるようにしよう。

T.　いま等速でランニングしているとする。

時間の単位を「秒」，距離の単位を「m」にする。

そして，20 秒で 100 mのペースだとする。

T.　時間をいろいろ変えて，時間と距離の対応をつくってみよう。

T.　つぎに，その対応から，数値と数値の対応を抜き出してみよう。

T.　量と量の対応から数と数の対応が導けた。

(4) 数値の対応のきまり

T.　この数と数の対応には，何かきまりが見つかるかな？

P.　5 倍。

T.　今度は，単位を「分」，距離の単位を「km」にする。

分と km を単位にして, さきほどの「20 秒で 100 mのペース」の対応を作り替えてみよう。

T.　そして, その対応から, 数値と数値の対応を抜き出してみよう。

T.　どうなった？

P.　0.3 倍。

T.　0.3 はどこから出てくるのか？

T.　時間の単位「分」の対応先が，時間の単位「km」の 0.3 倍。

(5)「比例定数」

T.　２量の比例関係で，２量それぞれの単位を決めるとき，比例関係から数と数の対応が導かれる。 この対応にはどんなきまりがあると言える？

P.　同じ倍。

P.　その数は，一方の量の単位の対応先を考えたとき，他方の量の単位に対するこれの値

P.　単位を変えると，倍も変わる。

T.　この「一定数倍」の数を，「比例定数」と呼ぶ。

大事なこととして，比例定数は単位の取り方に依存する。

註．以下に, 量の系 $((Q_1, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$, $((Q_2, \boldsymbol{+}), {}_{\times}, (N, +, \times))$ と関数 $f : Q_1 \to Q_2$ に関する「$f(\mathbf{q} \boldsymbol{+} \mathbf{q}') = f(\mathbf{q}) \boldsymbol{+} f(\mathbf{q}')$」と「$f(\mathbf{q}\, {}_{\times}\, n) = f(\mathbf{q})\, {}_{\times}\, n$」の同値を証明する。

1.「$f(\mathbf{q}\, {}_{\times}\, n) = f(\mathbf{q})\, {}_{\times}\, n$」「$f(\mathbf{q} \boldsymbol{+} \mathbf{q}') = f(\mathbf{q}) \boldsymbol{+} f(\mathbf{q}')$」

$\mathbf{q} = \mathbf{u}\, {}_{\times} n$，$\mathbf{q}' = \mathbf{u}\, {}_{\times} n'$ とする。

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \\
&= f((\mathbf{u}\, {}_{\times} n) \boldsymbol{+} (\mathbf{u}\, {}_{\times} n')) \\
&= f(\mathbf{u}\, {}_{\times} (n + n')) \\
&= f(\mathbf{u})\, {}_{\times} (n + n') \\
&= (f(\mathbf{u})\, {}_{\times} n) \boldsymbol{+} (f(\mathbf{u})\, {}_{\times} n') \\
&= f(\mathbf{u}\, {}_{\times} n) \boldsymbol{+} f(\mathbf{u}\, {}_{\times} n') \\
&= f(\mathbf{q}) \boldsymbol{+} f(\mathbf{q}')
\end{aligned}
$$

2.「$f(\mathbf{q} \boldsymbol{+} q') = f(\mathbf{q}) \boldsymbol{+} f(\mathbf{q}')$」「$f(\mathbf{q}\, {}_{\times}\, n) = f(\mathbf{q})\, {}_{\times}\, n$」

これの証明は，数の系を自然数から始めて，整数，有理数，実数へと拡張する形をとる。

(1) Nが自然数の場合

数学的帰納法で証明：

1° $f(\mathbf{q} \times 1) = f(\mathbf{q}) = f(\mathbf{q}) \times 1$

2° $f(\mathbf{q} \times (n+1)) = f((\mathbf{q} \times n) + (\mathbf{q} \times 1))$

$= f(\mathbf{q} \times n) + f(\mathbf{q} \times 1) = (f(\mathbf{q}) \times n) + (f(\mathbf{q}) \times 1)$

$= f(\mathbf{q}) \times (n+1)$

(2) Nが整数，有理数，実数の場合

(1) で「一方の２倍，３倍，‥‥に他方の２倍，３倍，‥‥が対応する」が証明された。
そして，「一方の２倍，３倍，‥‥に他方の２倍，３倍，‥‥が対応する」からは，整数，有理数，実数係数での「一方の○倍に他方の○倍が対応」が導かれる（§1.2 の註）。

2. 算数科の「比例」

2.1「倍作用」を封じてきたことの含蓄

2.2　現行の「比例」主題の構成

2.3　現行の「比例」指導の流れ

2.1「倍作用」を封じてきたことの含蓄

「比例」は２量の間の関係である。「量」がわかって「比例」がわかる，という順序になる。

「量」がわかるとは，つぎの系としてわかるということである。

((量 (集合), **+**), $_{\times}$, (数 (集合), ＋ , ×))

この系には，４つの算法がある。これらは，規則で互いにつながっている。
量計算は，これらの算法の運用である。
したがって，量 (系) がわかっていなければ量計算はできないという理屈になる。

しかし，量 (系) の理解は，ふつうにできることではない。
そこで，擬似論理でやり過ごすとかノウハウでやり過ごすとかの工夫になる。
算数科の「数と量」は，これをやっていくことになる。
このことに是非はない。

こういうわけで，算数科は，((量 (集合), **+**), $_{\times}$, (数 (集合), ＋ , ×)) の４つの算法のうちの **+** と $_{\times}$ をなくしている (註)。
実際，算数の教科書には，＜量と量の和＞，＜量に対する数の倍＞の式表現はないことになっている。
もし「2cm ＋ 3cm」「2cm × 3」のような式が教科書に載っていたり，教員が授業で使っているとしたら，それは不注意か，知らないことに因るものである。

しかし **+**，$_{\times}$ をなくす措置は，教員・生徒が，量計算を数計算に形式感覚で一挙にもっていかねばならないことを意味する。
+ の方は，「一挙に」をまだ暗黙にやれる余地がある。
問題は，$_{\times}$ の方である。
簡単な量計算ならともかく，少し複雑な量計算になるともう無理である。

例えば「毎秒ａmだと, 何秒でｂｍ？」の問題に対する「何」の「計算」は，倍作用 $_{\times}$ の推論である：

「毎秒ａｍ」は，時間と距離の間の比例関係で，秒に「ａｍ」が対応するもの.
「何秒」は，秒の何倍：

「何秒」＝ **秒** $_{\times}$ 何

時間の側の何倍には距離の側の何倍が対応するから,

「ａｍ」$_{\times}$ 何 ＝「ｂｍ」

ここで,

「ａｍ」$_{\times}$ 何 ＝ (**m** $_{\times}$ ａ) $_{\times}$ 何 ＝ **m** $_{\times}$ (ａ × 何)
「ｂｍ」＝ **m** $_{\times}$ ｂ

よって,

ａ × 何 ＝ ｂ

したがって,

何 ＝ ｂ ÷ ａ

この推論はもちろん算数の内容になるものではない. 算数は,「量計算を数計算に形式感覚で一挙にもっていく」になる. この問題だと,「ｂ ÷ ａ」を立式する形式感覚を身につけることが, 課題になる.

そこで，算数科はどうしたか？
数の計算式を導く立式ツールの開発に向かった。
今日，算数科は「倍」「倍の倍」を「二重数直線」で教えるようになっているが，「二重数直線」は立式ツールである。

→『「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい』

また，「倍作用」を封じることは「倍」の新たな定立の仕方に向かわせることにもなる。それが「*倍は関数*」である。
どういうことか？
数２は，長さ (要素) に対する倍作用素として，つぎの関数を導く：

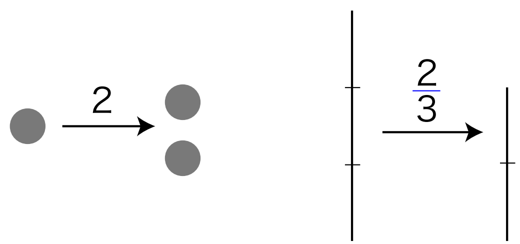
$$\mathbf{q} \longmapsto \mathbf{q} \times 2 \quad （\mathbf{q}：長さ(要素)）$$

この関数を「２倍」の意味にするのである。 ――「２倍」を要素にしている関数を改めて「２倍」の意味にするこの論法は，言うまでもなく循環論法である。

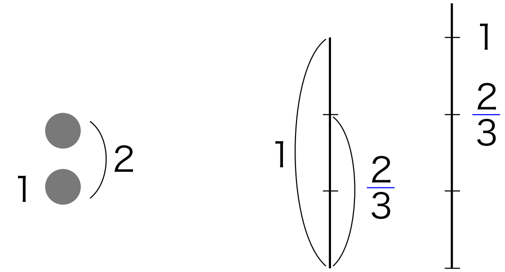
註：ここでは，量の数学の難しさが理由で ＋ と × をなくしているという論にしているが，「数は量の抽象」の立場から ＋ と × がないという側面もある。

→『数は量の比――「数は量の抽象」ではない』

「数は量の比」は，量の数学をそのまま引き受けるものであり，数は「作用素 / 倍 / 比 / 割合」としてつぎのように表すものになる：



一方，「数は量の抽象」は，「数は量の比」のアンチテーゼであり，数をつぎのように量ないし位の趣にして表すところとなる：



2.2 現行の「比例」主題の構成

算数の「比例」は，５年で比例関係 (「□が２倍，３倍，‥‥ になると，○も２倍，３倍，‥‥ 」) をやって，６年で比例定数（「ｙ＝きまった数×ｘ」）をやるようになっている．
ただし,「ｙ＝きまった数×ｘ」は,「比例と反比例」の単元の内容になっていて，「ｘ×ｙ＝きまった数」と相対させる趣きになる．

数学だと，構造 (空間) としての「量」をやったつぎは，これの「(準) 同型」の論がきて，「比例関係」がこの「(準) 同型」のことになり，さらに「比例関係の表現」(「単位を固定するときそのときの数値対応が一定数倍になるが，この定数を比例関係の単位依存の表現にする」) に進んで，これが「比例定数」の意味になる．
「ｙ＝きまった数×ｘ」は，数学では「比例と反比例」の格好で主題になるものではない．
ここにも数学と学校数学のずれが見られるわけである．

ひるがえって，学校数学で比例関係と比例定数が分かたれているのは,「比例と反比例」の構成のためである．この構成がなければ, 現行の「比例」教材では，比例関係と比例定数が一つの話になってしまう．
以下，このことを示す。

引用・参考文献にリストした 23 年度教科書で，比例関係と比例定数の素材および定義がどのようであるか見ていくと，つぎのようになっている：

1. 比例関係・比例定数の素材は，つぎの形をしたものである：

比例関係（５年）

時間 □(秒)	1	2	3	4	‥‥
長さ ○(m)	3	6	9	12	‥‥

比例定数 (６年)

時間 x (秒)	1	2	3	4	‥‥
長さ y (m)	3	6	9	12	‥‥

即ち，最初に単位を定めて，数値の対応表を素材にする．
そして，二つの表は，変数 (変項記号 , variant) が違うだけで，同じものである．

2. 比例関係・比例定数は，上の表に対してつぎのように述べられる：

「２つの変わる量□と○があって, □が２倍, ３倍, ‥‥ になると, ○も２倍, ３倍, ‥‥ になるとき, ○は□に比例するといいます。」(学校図書５下 , p.50)
「２つの量ｘとｙがあって，ｙがｘに比例するとき，この関係を式で表すと，つぎのようになります。
ｙ＝きまった数 × ｘ」(学校図書６下 , p.41)

ここでは，学校図書の教科書から文言を引いたが，各社の文言もこれと同型である．

この記述は，文法が整合していない．不整合は，形式言語 (→ 『" 理論 " の定式化』) ばりに□，○，ｘ，ｙが何の変項記号かを宣言すればはっ

きりする．それは，量ではなく数が値の変項記号になっている．

註：教育出版の教科書は，「量」ではなく「数量」のことばを用いている．また，小学校学習指導要領ないし小学校学習指導要領解説算数編では，「伴って変わる二つの数量の関係」の文言に「数量」が見える．
この「数量」について解説しておくと，これは「数と量」ではない．「個数と量」であり，「離散量と順序稠密量・完備量」(『「数とは何か？」への答え』) である．
すなわち，この「数量」は「量」と言っているのと同じである．

現行は最初に単位を設定し，変項記号が数の変項記号であるようにする．そしてこの結果は，「□が２倍，３倍，‥‥ になると，○も２倍，３倍，‥‥ 」「y＝きまった数 × x」が，数値の対応表に対し横の倍を見るか縦の倍を見るかの違いになる，というものである．

> 実際，５年の「比例」の授業で，「生徒が縦の倍も見てしまった」に場面展開してしまうことがあり得る．そしてこの展開を止める理屈は立たない．

これは，「比例定数」の数学 (「比例関係の表現――単位を固定するときそのときの数値対応が一定数倍になるが，この定数を比例関係の単位依存の表現にする」) を無くしてしまうということである．

参考・引用文献

小学校学習指導要領 (平成 20 年 3 月改正)，第 2 章 各教科，第 3 節 算数
小学校学習指導要領解説 算数編 (平成 20 年 6 月改正)
平成 23 年度 『小学校算数５下』『小学校算数６下』，学校図書
平成 23 年度 『小学算数５下』『小学算数６上』，教育出版
平成 23 年度 『わくわく算数５上』『わくわく算数６上』，啓林館
平成 23 年度 『たのしい算数５上』『たのしい算数６下』，大日本図書
平成 23 年度 『新しい算数５上』『新しい算数６下』，東京書籍

2.3　現行の「比例」指導の流れ

「比例」の現行指導内容は，最初に単位を設定する構成になっている。
この構成が導く「比例」の授業は，つぎのものである：

(1)「比例関係」の数値表の導入

T.　「等速」を考えよう。
T.　２秒に 10 mだと，６秒では？
P.　時間が２秒の３倍だから，距離は 10 mの３倍で，30 m。
T.　12 秒だったら？
P.　時間が２秒の６倍だから，距離は 10 mの６倍で，60 m。
P.　時間が６秒の２倍だから，距離は 30 mの２倍で，60 m。

時間 (x秒)		2		6		12	
距離 (ym)		10		30		60	

(2)「比例」のことばの導入

T.　２つの量ｘ，ｙの間の関係で，ｘの値が２倍，３倍，‥‥のときｙの値も２倍，３倍，‥‥の関係を，「比例」という。

(3)「ｙ＝決まった数 × ｘ」の導入

P.　縦が，同じ倍になっている。５倍だ。
P.　だから，６秒のとき（６× ５) m＝ 30 m，12 秒のとき（６× 12) m＝ 60 m。
T.　５はどこから出てくるのか？
P.　１秒のとき５m。
T.　「ｙ＝決まった数 × ｘ」のきまりが見つかった。
T.　「比例関係」は，「ｙ＝決まった数 × ｘ」と言い換えられる。

このように，「比例」の現行指導内容の構成では，「比例関係」と「ｙ＝ａｘ」が表を横に見るか縦に見るかの違いになる。
そして，表だけのことであれば，横・縦どちらが優位ということはない。
こうして，「比例関係」と「ｙ＝ａｘ」は同列のものになる。

このことを，本論考はつぎのようにまとめる：

数学の「比例」の構成：

比例関係 → 単位の固定 → ｙ＝ａｘ

に対し，現行の「比例」指導は，つぎの構成になっている：

単位の固定 → 比例関係
ｙ＝ａｘ

3.「教育的ソリューション」と「数学知らず」

3.1「教育的ソリューション」

3.2「数学知らず」

3.1「教育的ソルーション」

「比例」の数学に準ずる「比例」指導 (§2.3) は,「比例」の現行指導内容の指導 (§3.3) と比較して，教員にとって難度の高いものになる。
「教育的ソルーションは？」と問われれば，現行指導内容の方に傾きたくもなる。

では，難度の低い方が「教育的ソルーション」か？

例えば，量表現は，メジャーを使えば済む。そもそも，日常生活では,量には最初から単位がついている。「任意単位」をやることは,「量の比」という数学をやるためであり，この数学を考えるのでなければ要らないことである。

長方形の面積は,「単位を敷き詰めたときの個数」から起こすことを要らないとしたら,「*長さ×長さ＝面積*」でよいことになる。

「速さ」の問題は,「時間の○倍に距離の○倍が対応」から起こすことを要らないとしたら,「*距離÷時間＝速さ*」(「はじき」) でよいとなる。

そして,「比例」は, つぎの数学を要らないとしたら, 最初から「$y = a\ x$」でやればよいとなる：

　《単位がつく以前の「量の比例関係」なるものを考え,
　　つぎに,「単位固定による数値対応の導出」を考え,
　　そして比例関係の表現数として「比例定数」を導入する》

「ソルーション」の考え方は「均衡」である。

「均衡」とは，いろいろな動きの均衡であって，一律になって静止していることではない。
この「いろいろな動き」の中に,「算数科をどこまで数学にするか」の動きを含めることになる。
そうでなければ,「数学疎遠・数学無視──数学知らず」の学校数学に,数学は無くなる。
「比例」でいうと，自分が算数科をつくるとしたら「比例」を指導しなければならないと思うのか，という動きである。

もともと，<u>数学にする・しないに，是非はない</u>。
この場合，算数科をどこまで数学にしそしてしないのかという問題に対する，個々の考え方があるのみである。
算数科は個の相互作用の力学場であり，その都度の均衡相が算数科のソルーションである。
そして, 算数科のソルーションの現れたものが「現行」というわけである。

3.2「数学知らず」

算数科をどこまで数学にしそしてしないのかに，是非はない。
しかし，数学にしないことは，実際問題として，「数学知らず」になることである。
既に「数学知らず」だが, 決定的な「数学知らず」に進むということである。

「授業者は数学に目を向けられるか」という問題を立てるとき, 教科書が, ミスリーディングになっている構図が見える。
即ち，教師も教科書で学ぶ。
「教師用指導書」の類も，現行と数学の違いとその理由を知らせるという趣旨のものではないし，実際そのような内容にはなっていない。
学習指導要領，小学校学習指導要領解説も，この点で同様である。

「比例」のつぎの定義には,「単位がつく以前の量の比例関係」があった:

> 「*2 つの量のいっぽうの大きさが，2 倍，3 倍，‥‥になると，もういっぽうの大きさも，2 倍，3 倍，‥‥になるとき，この 2 つの量は比例するといいます。*」

現行の「比例」の定義：

> 「*ともなって変わる 2 つの量 x と y があって，x の値が 2 倍，3 倍，‥‥になると，y の値も 2 倍，3 倍，‥‥になるとき，y は x に比例するといいます。*」

では，これがなくなり，「比例」と「y＝a x」が，「表を横に見るか縦に見るか」の違いとして，同列に並ぶ。
これは，「比例」からつぎの数学を無くす措置になっている：

> 「単位の導入：量対応を数対応に表現」

しかしこれは，「量と測定」領域の数学であるところの

> 「単位の導入：量を数に表現」

に相等するものを無くしているわけである。
そして，このことをわかっていないとすれば，それは「数学知らず」である。

おわりに

「整数比にならない比がある──無理数が立つ」は，日常生活に役立たない。
しかし，これが数学というものである。
数学は，「役に立つ」で回っている日常生活からむしろ脱けるとか批判するふうに立つ。
理屈っぽく，偏屈である。

子どもに数学を勉強させようとするのは，この理屈っぽさ偏屈さに意義を見出すからである。
子どもにとって数学の勉強がたいへんなことは，最初からわかっている。
数学の勉強をさせることは，たいへんを引き受けさせることである。

ただし，たいへんをやろうとしても，実際にできなければしょうがない。
そこで，できることのぎりぎり──数学をできるだけ損なわないのぎりぎり──を考え出す。
これが「教育的方便」である。

しかし方便は，これが所与になる後の世代の教員には，「本当」になる。
方便は，方便であることが世代忘却され，「数学忘却」と同じになる。

「比例」の現行指導内容は，「数学忘却」よりさらに深刻な問題を孕んでいる。
「数学知らず」である。
「忘却」する以前の「数学」が持たれていないのである。

本論考は，この問題意識から，「比例」」がどのような主題なのかを再確認しようとした。
そしてこれに併せて，「数学知らず」が学校数学にとってつねに身近な問題であることを示そうとした。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

『「構成」知らずの勇み足：「比例」の現行定義の場合』

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

「数」の数学対学校数学 (6)

「構成」知らずの勇み足：「比例」の現行定義の場合

2014-03-25　初版アップロード (サーバー：m-ac.jp)

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp