図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための
「かけ算の順序」論争がわかる本
シリーズ (4)

「かけ算の順序」のイデオロギー

Ver. 2012-02-24

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「かけ算の順序」論争がわかる本 (4)

「かけ算の順序」のイデオロギー

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている『「かけ算の順序」のイデオロギー』をPDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は,「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの, <「かけ算の順序」論争解説＞シリーズの 4 になるものです。

<「かけ算の順序」論争解説＞シリーズの趣旨は, 読者が論争の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは, <「数」がわかる本＞シリーズに後続する内容になっています。また, <「数」の数学対学校数学＞シリーズと併読される内容になっています。

「かけ算の順序」論争の中の「数」は, 数学の「数」とは違っています。特に, その論争は, はなから数学を外したものになっています。論争の「数」に対するときは, このことを理解している必要があります。そして, このことの理解には, 数学の「数」の理解が含まれるわけです。

「「数」がわかる本」シリーズは, 現在かなり大部になっています。そこで, この内容の<早わかり＞としてつぎのテクストを用意していますので, 利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

<「数」がわかる本＞シリーズ （数学の「数」）

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講

<「数」の数学対学校数学＞シリーズ （イデオロギーの「数」）

- 数は量の比 —「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？—学校数学の「量」
- 「分数のかけ算・わり算」の数学と学校数学
- 「数直線でかけ算・わり算」は, わかるのがおかしい

<「かけ算の順序」論争解説＞シリーズ （モンスターの「数」）

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争——延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー （本テクスト）

序

2011-02-02
　オンラインブック『「かけ算の順序」のイデオロギー』をアップロード。
2011-01-29
　初代『「かけ算の順序」の数学』を『「かけ算の順序」の数学』と『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分割。

本書は，「数がわかる本」シリーズ学校数学編の第３です。

「数がわかる本」シリーズは，現在つぎのようになっています：

数学編
- 『「数とは何か？」への答え』
- 『いろいろな数がつくられるしくみ』
- 『いろいろな数が「数」であること』
- 『四元数』
- 『量計算の論理』
- 『「かけ算の順序」の数学』

学校数学編 (あるいはイデオロギー / 素人談義について)
- 『数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」 — 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』
- 『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』
- 『「かけ算の順序」のイデオロギー』(本書)

講義編
- 『「数の理解」15 講』

数学編の『「数とは何か？」への答え』は，「数と量」の基礎論 / 総論になります。そして数学編のほかの５テクストは，各論 / 詳説の位置付けになります。

『いろいろな数がつくられるしくみ』では，

自然数 → 分数 → 正負の数 → 複素数

と流れる「数の構築」を扱いました。

これらが「数」であるという意味は，これらが「数」の形式をもっているということです。『いろいろな数が「数」であること』では, この「数」の形式を，自然数･分数･正負の数･複素数を横断する形で，示しました。

「数」の構築は，既存の数の系を拡張するように行われます。そして数の拡張を行うたびごとに，「数」の既存の概念で通用しなくところが現れてきます。このとき「数」の概念の再調整が必要になります。このことを改めて確認しようという趣旨から，シリーズに『四元数』を加えました。実際，四元数までいくと，「積の可換性」が「数」の条件でなくなります。

「数と量」の論理は，量計算の実際のところではっきりしてきます。量計算は各テクストに現れていますが, 一冊でまとめて見られるように『量計算の論理』を作成しました。

「かけ算の順序」は，素人の素朴な疑問になるのと，このテーマをイデオロギーでずっとやってきたひとの問題になるのとでは，意味合いが

まったく違ってきます。したがって，「かけ算の順序」の話も，これの数学を入門者に教えるように論ずるのと，「かけ算の順序」のイデオロギーを論ずるのとでは，まったく位相が違ってきます。
初代『「かけ算の順序」の数学』はこの２つがいっしょになっていました。そこでこれを，『「かけ算の順序」の数学』と『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分けました。——『「かけ算の順序」の数学』を数学編 (6) とし，『「かけ算の順序」のイデオロギー』を本テクストとして学校数学編 (3) としました。

以下，本テクストを含む学校数学編の３テクストについて。

学校数学の「数」は数学になっていません。このことを述べるために，『数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』を作成しました。

『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』は，『数学は「数は量の比」, 学校数学は「数は量の抽象」— 学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』の分量がかさんだため，これの導入・簡約版になるよう作成しました。

そして本書は，「かけ算の順序」が＜数は量の抽象＞のイデオロギーの中で話題になるとき，反照的にこのイデオロギーのどんな性格を顕すことになるかを，論じようとするものです。
なお，本書は，『いろいろな数がつくられるしくみ』,『いろいろな数が「数」であること』,『「かけ算の順序」の数学』の３テクストに読者が一通り目を通すことを，想定しています。

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

ネットには,「*かけ算の順序に意味があるのか, 教えて下さい？*」の質問がよく出てくる。この質問の本意は, こうである：

> *かけ算の順序」みたいな基本的なことをいまさら疑問に思うとは,*
> *いったいどうしたことだろう？*
> *自分はいったい, どんな教育を受けてきたのだろう？*
> *周りも, 自分と同じようだ。*
> *試みにこの質問を出して, いったいどんなリアクションが出てくるか見てみよう。*

この質問に対するいろいろなリアクションのうちの一つに, つぎのタイプのものがある：＜量は数の抽象＞のイデオロギーからの回収。しかしこれは, 回収にかかるが, 自分では答えをもっていないことを曝すふうになる。(すぐに回収にかかろうとするのは, イデオロギー一般の癖である。自分では答えをもっていないのは, イデオロギー一般の特徴である。)

そこで, 質問者はつぎのように得心するのである：

> やはり, みんなわかっていないのだ。
> 指導口調の者も, したり顔をしているだけなのだ。

本テクストは, この質問者へ「みんなわかっていない」がどういう状態 / 構造のものかを伝えようとするものである。
これも一つの「イデオロギーからの回収」になるのかどうかは, 読者の判断に委ねる。

1　＜数は量の抽象＞の「かけ算」

1.1　＜数は量の抽象＞から導かれる「かけ算」

1.2　＜数は量の抽象＞は，「かけ算」で窮する

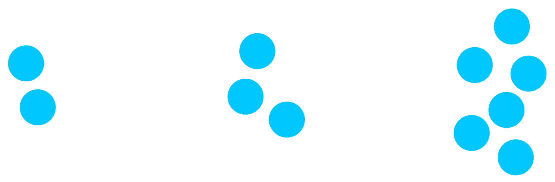
1.3.「１あたり量 × いくつ分」

1.1　＜数は量の抽象＞から導かれる「かけ算」

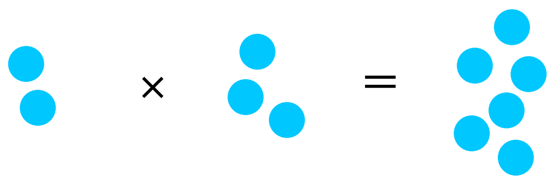
学校数学は，＜数は量の抽象＞である。
特に，数は量である。

自然数は，個数の抽象である。
個数が，自然数を抽象させるところの量である。

そこでつぎが自然数２，３，６である：

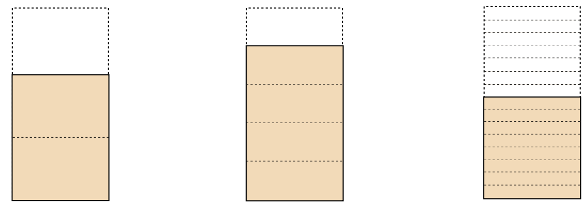


ところでこの２，３，６は，２× ３＝６の関係にある：

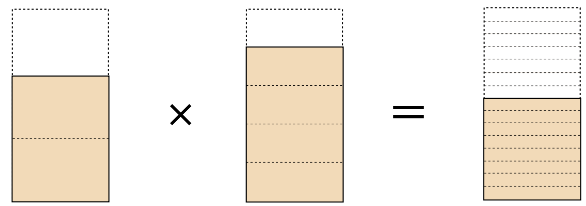


翻って，「×」はこの関係の或る読み方を示すものということになる。
さて，どのように読むのか？

つづいて分数。
分数 2/3，4/ 5，8/15 は，つぎの量である：



ところでこの 2/3, 4/ 5，8/15 は，2/3 × 4/5 ＝ 8/15 の関係にある：



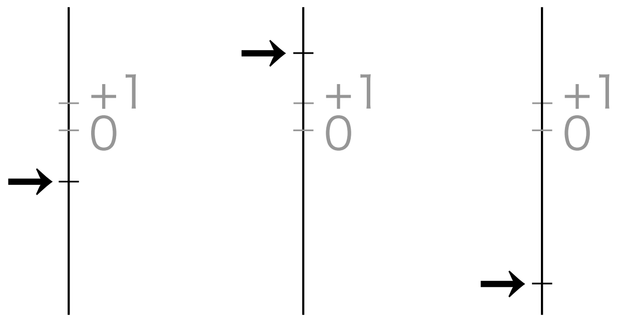
翻って，「×」はこの関係の或る読み方を示すものということになる。
さて，どのように読むのか？

中学数学の「正負の数」は，つぎのように導入される：

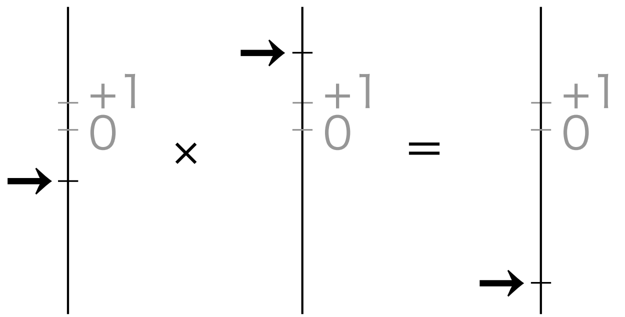
《これまで学習した数の数直線で，逆遡行を開始する。》

そしてこのときは，数の絵が，これまでの＜大きさ＞から＜位(置)＞に変わることになる。(＜数は量の抽象＞の立場では，数の絵は＜大きさ＞の絵になる。しかし，「正負の数」では，強引に＜大きさ＞の絵をつくることも，ままならない。)

そこで，正負の数 －2，＋3，－6 は，つぎの位である：



ところでこの −2, ＋3, −6 は, (−2) × (＋3) ＝ (−6) の関係にある:



翻って,「×」はこの関係の或る読み方を示すものということになる。
さて, どのように読むのか？

問題になったこれら３つの読み方は, どれもまともにつくることができない。
問題が難しいからではなく, 前提にしている＜数は量の抽象＞がもともと荒唐無稽だからである。

しかし学校数学で「*これがかけ算である！*」と生徒に指導することになるものは, これである。

　註：ここに教員の苦心・苦労を読むのは, 当たっても半分である。
　　というのも, 教員の方も,「*これがかけ算である！*」を疑っていないからである。

さて,「かけ算の順序」の問題は, ここで示した「かけ算」について考えられているのである。
土台が荒唐無稽なところに問題を立てれば, どういうことになるか？
これを見ていくとしよう。

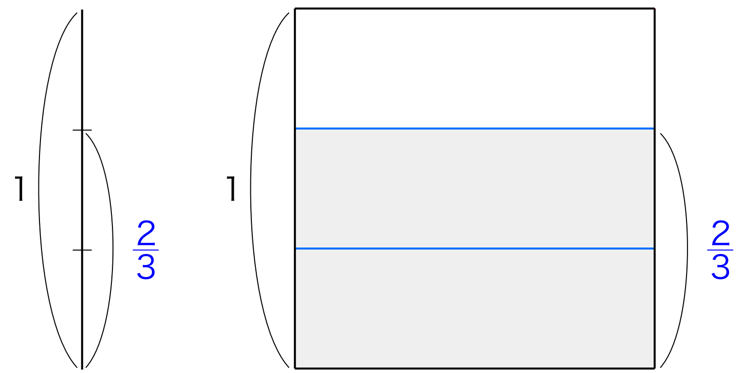
1.2　＜数は量の抽象＞は，「かけ算」で窮する

＜数は量の抽象＞は,「数の積」のところで, 破綻がはっきりと曝される。
どうして「数の積」のところなのか？
簡単に言うと，量には積がないからである。

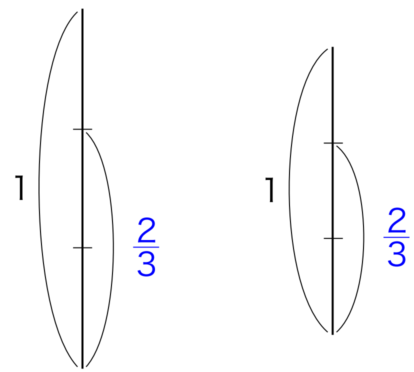
＜数は量の抽象＞では，数は量である。
数の積を導入することは，量の積を導入することである。
量の積はないから，数の積は荒唐無稽の話になる。

1.3　「1 あたり量 × いくつ分」

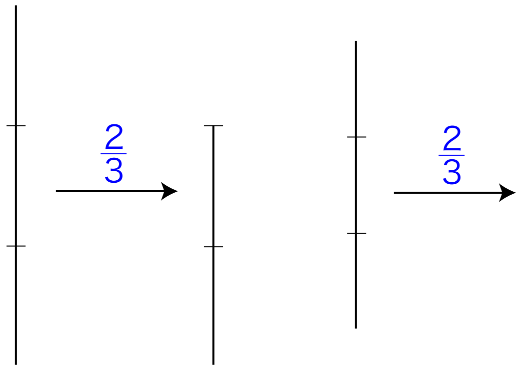
学校数学の「数」は，＜数は量の抽象＞である。
特に，分数「2/3」は，つぎの絵に表現されるものになる：



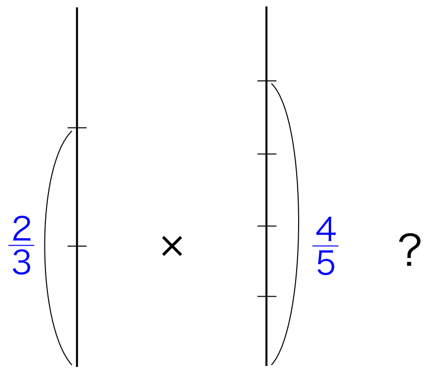
実際には，つぎの二つの「2/3」を並べてみればわかるように，「2/3」は量を表しているのではなく，量の比を表している：



すなわち，こういうことである：



＜数は量の抽象＞の無理な立場は，「かけ算」の意味づけでいっきょに苦しいものになる。
数が量の抽象だとすると，数の積は量の積の抽象でなければならない。
たとえば，「2/3 × 4/5」をどう考えたらよいか？
つぎのようだと，意味が立たない：

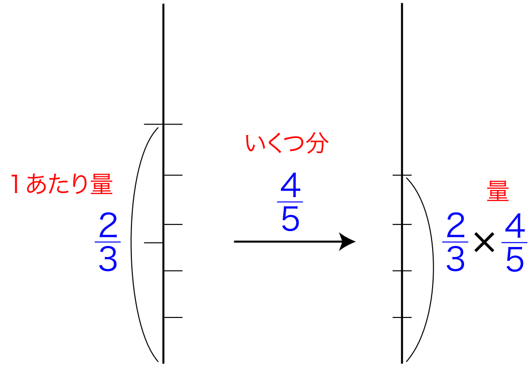


＜数は量の抽象＞はここで，つぎの理屈を示してくる：

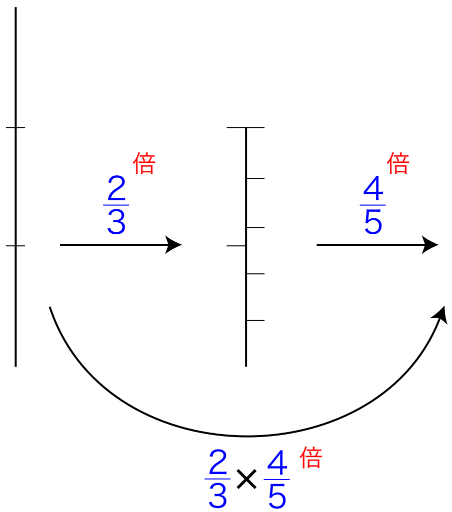
「かけ算は，１あたり量 × いくつ分 である。
１あたり量，いくつ分 は，異なるタイプの量（内包量と外延量）であるが，いずれにしても量である。
というわけで，数はやはり量の抽象であり，そして数の積は量の積の抽象である。」

数学は，＜数は量の比＞である。
＜数は量の抽象＞と＜数は量の比＞を対比すると，つぎのようになる：

数は量の抽象：



数は量の比：



しかし，学校数学が数学と見なしているのは，＜数は量の抽象＞の図式の方である。

２ 「１あたり量 × いくつ分」
から導かれる「かけ算の順序」

4.3.1「１あたり量 × いくつ分」に２つの場合

学校数学は，＜数は量の抽象＞の立場である。
＜数は量の抽象＞の立場では，数の積は量の積の抽象である。
すなわち，「×」は「１あたり量 × いくつ分」のことであり，「１あたり量 × いくつ分」は＜１あたり量＞と＜ いくつ分＞という２つの量の積である。そしてこの２つの量の異質は，「内包量」と「外延量」の違いであるとされる。

この説明は，存在論である。
数学とは別のものである。
「１あたり量 × いくつ分」は，立場（イデオロギー）であり，このようなものとして理解してやるところのものである。

一方，「１あたり量 × いくつ分」は，この構造を数学のことばで同定してやることができる。
そしてこれを行うことが，「１あたり量 × いくつ分」の混迷を明らかにすることになる。
翻って，「１あたり量 × いくつ分」の混迷を明証する方法は，唯一，数学を用いることである。

ところで，「１あたり量 × いくつ分」とは，どういうものか？
すなわち,「１あたり量 × いくつ分」を数の「×」の意味にしている者は,
これをどのように受け取っているのか？

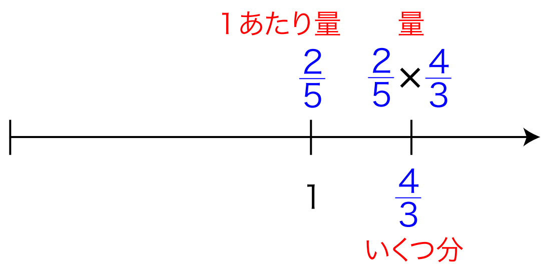
ここに，典型的に２通りの表現が見出される：

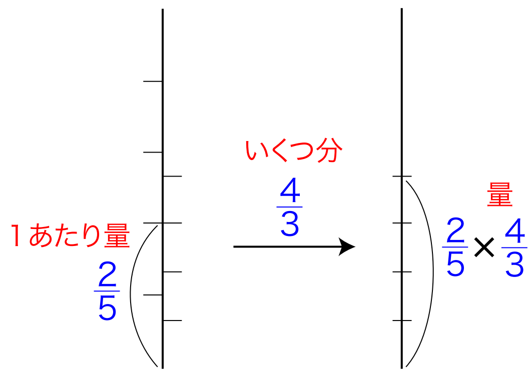
A.「2 g/cm^3 × 3 cm^3 ＝ (2× 3) g」
B.「2個ひとかたまりの3つ分は，(2× 3) 個」

B については「2個 / かたまり × 3かたまり＝ (2× 3) 個」にとらえて A と同じにすることもできるが，ここでは「(個が2つ) × 3 ＝ (2 ×3) 個」ととらえることにして，A，B を「1あたり量 × いくつ分」に対するつぎの2通りの解釈であるとする：

A.「＜比例関係＞と＜量＞の結合」
B.「＜単位の倍＞と＜倍＞の結合」

図式でいうと，つぎの2つの図式が，それぞれ A と B にあたる：





B は「量の積」からのかなりの逸脱に見えるが，もともと「量の積」は没数学の概念であり，A にしても逸脱である。

註：「数の積は量の積の抽象」と言われたときの「量の積」は，すなおには「重さ × 重さ」「速さ × 速さ」である。「1あたり量 × いくつ分」は，牽強付会なのである。

以下, A, B それぞれの数学を押さえ, この数学を用いて, A, B が導く「かけ算の順序」がどうなるかを示していく。

4.3.2「＜比例関係＞と＜量＞の結合」の解釈

「1 あたり量 × いくつ分」に対する「＜比例関係＞と＜量＞の結合」の解釈を示すには，準備が要る。
先ず，これを行う。

＜液体の体積 (かさ) と重さの関係＞を例にする。
この関係は，比例関係である。
体積(系) と重さ(系) を，分数係数で考えよう。
分数(系) を (N, ＋, ×) とし, 体積(系), 重さ(系) をそれぞれ (($Q_{体積}$, $\boldsymbol{+}$), $\boldsymbol{\times}$, (N, ＋, ×)), (($Q_{重さ}$, $\boldsymbol{+}$), $\boldsymbol{\times}$, (N, ＋, ×)) とする。 ——なお，この構造の普遍対象が, ＜量としての数＞の ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) である。

「比例関係」は, 数学では,「量の構造に関する準同型」ということになる。
そして数学の表記にならえば，体積(系) と重さ(系) の間の比例関係全体の集合は，Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) と書かれる。

Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) からは, 量 ((Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$), $\boldsymbol{+}$), $\boldsymbol{\times}$, (N, ＋, ×)) が導かれる。
すなわち，$\boldsymbol{+}$ と $\boldsymbol{\times}$ を，つぎのように定義するわけである：

1. f, g ∈ Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) に対し，f $\boldsymbol{+}$ g ∈ Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) をつぎのように定義する：

$$(f \boldsymbol{+} g)(x) = f(x) \boldsymbol{+} g(x) \quad (x \in Q_{体積})$$

2. f ∈ Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$)， n ∈ N に対し，f $\boldsymbol{\times}$ n ∈ Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) をつぎのように定義する：

$$(f \boldsymbol{\times} n)(x) = f(x) \boldsymbol{\times} n \quad (x \in Q_{体積})$$

こうして，比例関係は量になる。
例えば，速度は時間と距離の比例関係であるが，これは量として足したり倍したりできるわけであり，実際，日常的にそうしている。

> 註：＜数は量の抽象＞は，「内包量」の特徴づけを「足せない」にする。併せて，速度を内包量の一つにする。
> ＜数は量の抽象＞の立場では，速度は足せない。

以上で，「1 あたり量 × いくつ分」に対する「＜比例関係＞と＜量＞の結合」の解釈を示す準備ができた。
「1 あたり量 × いくつ分」は，「×」の意味を，Hom($Q_{体積}$, $Q_{重さ}$) × $Q_{体積}$ の $Q_{重さ}$ への写像：

$$(f, x) \longmapsto f(x) \quad (f \in \mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ}),\ x \in Q_{体積})$$

に定めていることになる。
すなわち，つぎを記号「×」の用法にしている：

$$f \times x = f(x) \quad (f \in \mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ}),\ x \in Q_{体積})$$

ちなみに，この「×」に対応する数学を求めるならば，「テンソル積」がこれにあたる。(→ 「2 個 / 皿 × 3 皿 ＝ 6 個」の数学：テンソル積)

「数の積は量の積の抽象」の意味は，＜ f × x に対し，数の積の式を立てる＞である。

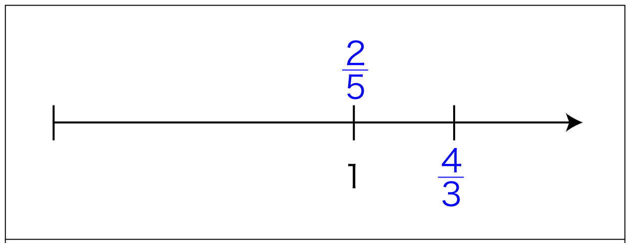
これをどのようにしているか？

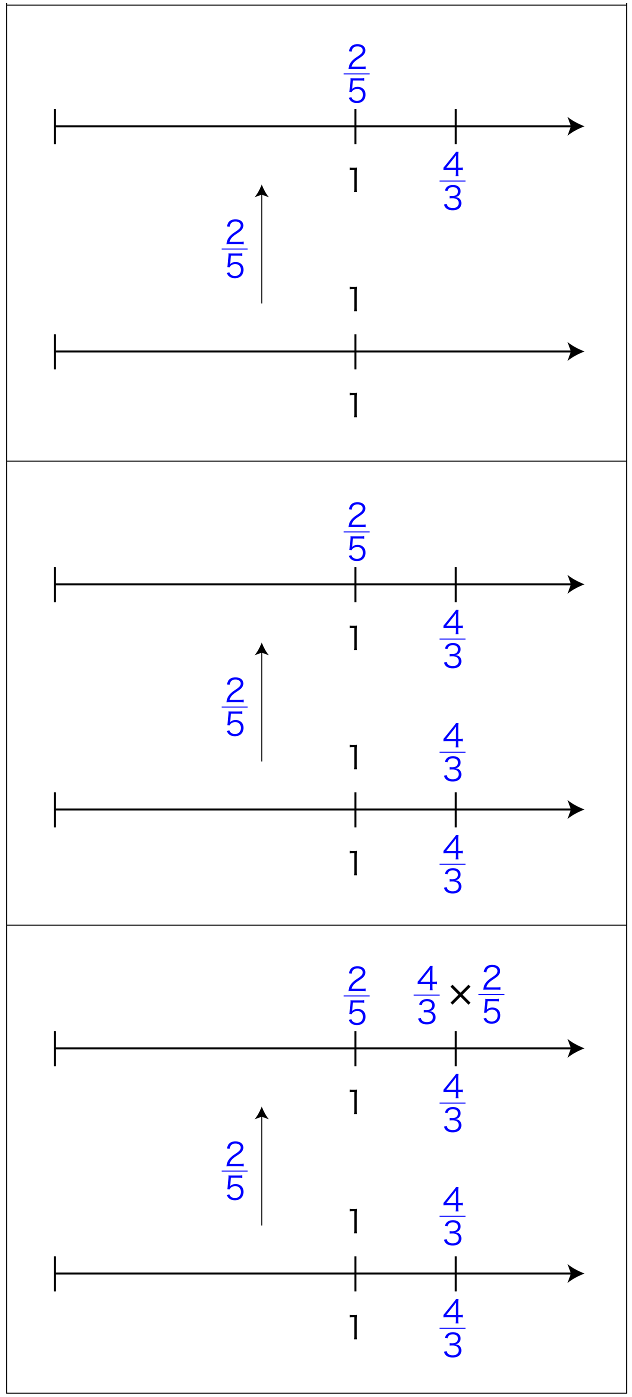
文章題では，体積と重さの単位がたとえば cm^3 と g で与えられ，そして f × x が「 2/5 g/cm^3 × 4/3 cm^3」のようになる。
「数の積は量の積の抽象」の立場は，「 2/5 g/cm^3 × 4/3 cm^3」に対し直接「2/5 × 4/3」を立式することになる。
この立式に，明証は無い。

これを明証する数学は，つぎのようになる：

「 2/5 g/cm^3 × 4/3 cm^3」
= (g/cm^3 × 2/5) (cm^3 × 4/3)
= (g/cm^3 (cm^3 × 4/3)) × 2/5
= (g/cm^3 (cm^3) × 4/3) × 2/5
= g × (4/3 × 2/5)
= 「(4/3 × 2/5) g」

「数直線」だと，つぎの手順の作図になる：



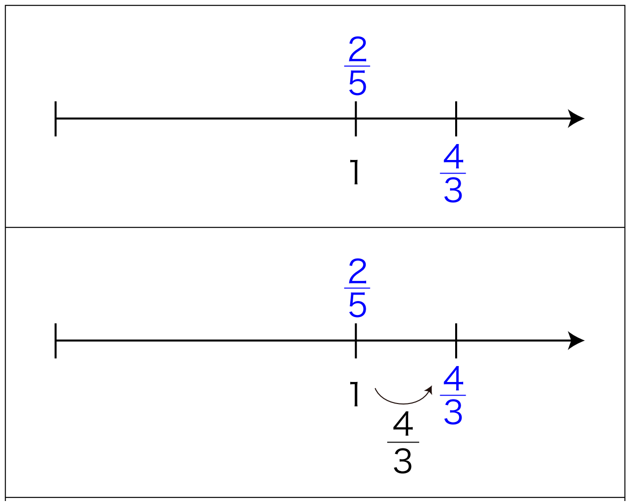


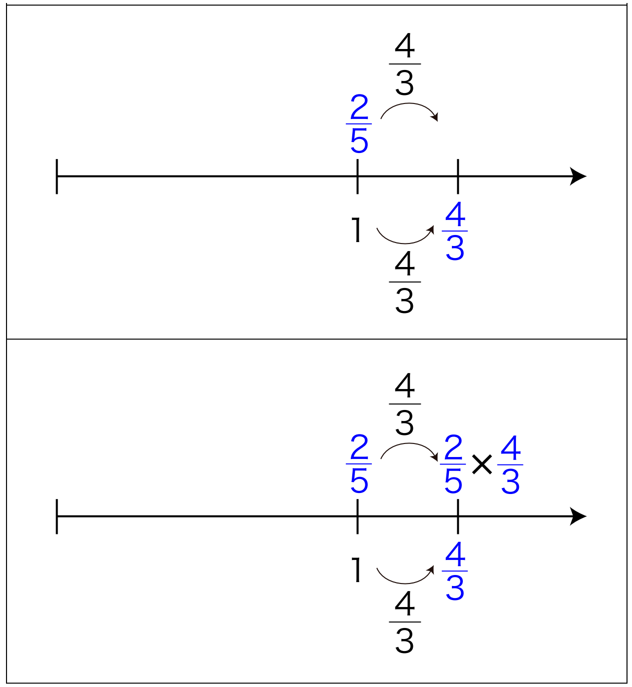
ここで，「1あたり量 × いくつ分」での 2/5 と 4/3 の順序が，数の積の式では逆になった。

「1あたり量 × いくつ分」の順序と積の式の２数の順序を同じにしたいならば，$\mathrm{g/cm^3} \times 2/3$ が比例関係であることを先に適用して，つぎの流れに替えることになる：

$$
\begin{aligned}
&「\ 2/5\ \mathrm{g/cm^3} \times 4/3\ \mathrm{cm^3}」\\
&= (\ \mathrm{g/cm^3} \times 2/5\ )\ (\ \mathrm{cm^3} \times 4/3\ )\\
&= (\ \mathrm{g/cm^3} \times 2/5\ )\ (\ \mathrm{cm^3})\ \times 4/3\\
&= (\ \mathrm{g/cm^3}\ (\ \mathrm{cm^3}\ ) \times 2/5\ ) \times 4/3\\
&= \mathrm{g} \times (\ 2/5 \times 4/3\ )\\
&= 「(\ 2/5 \times 4/3\ )\ \mathrm{g}」
\end{aligned}
$$

「数直線」だと，つぎの手順の作図になる：



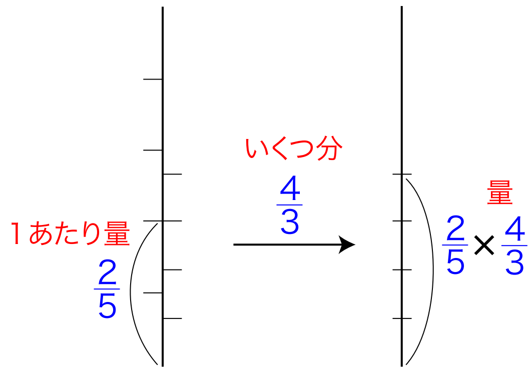


このように，「＜比例関係＞と＜量＞の結合」の解釈を以て「1あたり量 × いくつ分」を立場とするときは，数の積の式での２数の順序が定まらない。

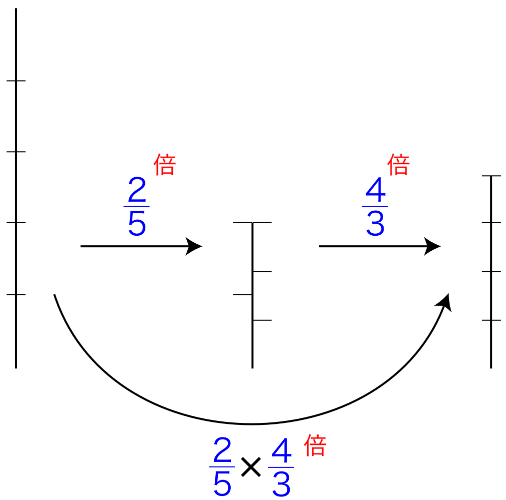
「1あたり量 × いくつ分」を立場にすることは，「＜比例関係＞と＜量＞の結合」がこれの解釈である場合には，「かけ算に順序はない」を引き受けることなのである。

4.3.3「＜単位の倍＞と＜倍＞の結合」の数学

つぎは，「1あたり量 × いくつ分」の内容が「＜単位の倍＞と＜倍＞の結合」であるときの，これの図式である：



この図式は，＜単位の倍＞を＜単位＞と＜倍＞に分けるとき，つぎの数学の図式にあと一歩というところに来る：



翻って，「1あたり量 × いくつ分」は，＜単位の倍＞を＜単位＞と＜倍＞に分けないという一点で，自身を保っているわけである。

数の「×」の意味を「1あたり量 × いくつ分」にする立場は，同時に「*この順序がかけ算の順序である*」と主張する立場である。そして，「1あたり量 × いくつ分」が「＜単位の倍＞と＜倍＞の結合」であるときは，確かにこの順序の他ではなくなる。実際，「＜単位の倍＞と＜倍＞の結合」の図式だと，「1あたり量」の前に「いくつ分」をおくことはできない。

そしてこのときの順序は，数学の「かけ算の順序」と一致する。しかし，この符合は，単に，数学の「かけ算の順序」を見て「1あたり量 × いくつ分」を発案したためである。
実際，「1あたり量 × いくつ分」は，自身の系の中で「かけ算の順序」を明証的にすることはできない。そもそも存在論として自分を立てているからである。

3　＜数は量の抽象＞のイデオロギー

3.1　＜数は量の抽象＞の沿革

＜数は量の抽象＞は，「かけ算」ではっきり破綻を曝す。
このようなものが，どうして学校数学になることができたのか？
これを理解するためには，学校数学の歴史を振り返ってみる必要がある。

時代は，戦後の反権力・反体制運動の時に遡る。
運動は，各領域・分野において権力・体制への対立軸づくりを作業するものになる。
学校教育は，自ずとこの運動の最重要領域になる。
各教科で，対立軸づくりが行われた。

学校数学に対しては，数学教育を唯物論に従わせることを，権力・体制への対立軸にした。なぜ唯物論かというと，その時代の反権力・反体制運動のイデオロギーが唯物論のものだったからである。
そして，物から数を導いてみせることが，これの作業とされた。

この作業にどうして道理ないし勝算を感じることができたのか？
ここには，いろいろな要素と，歴史の偶然の妙というものがある。

《物から数を導く》の発想では，カントールの集合論が強力な理論になると目された。「集合の基数」が，物から数が導かれる理屈になると思われたのである。
しかも，カントールは，自分とピッタリ重なり合うところがあるように感じられた。カントールには，クロネッカーから権力による迫害を受け精神を病んでしまうというストーリーがある。そして，クロネッカーは，物から浮いた「数え主義」——権力・体制の学校数学の「数え主義」——の張本人である。
こうして，実にうまく符合する格好で，善玉・悪玉のストーリーができあがる。

＜数は量の抽象＞は，数学ではなく，イデオロギーである。＜数は量の抽象＞は，イデオロギーとして勢力・影響力を増し，そして学校数学になる。
このとき，＜数は量の抽象＞は＜数は量の比＞を負かして学校数学になる。そしてまったく拙いことに，数学は，負かされた方の＜数は量の比＞にある。

いちどは，＜数は量の抽象＞と＜数は量の比＞のせめぎ合いのフェーズがあった。「割合論争」と呼ばれたものがそれである。
山の分水嶺でどちらの側に落ちるかは，偶然の要素が強く作用する。しかし，いったんどちらかの側に落ちると，もはや他の側に移ることはできない。
学校数学は，ちょうどこのようになった。
学校数学は＜数は量の抽象＞の側に落ち，数学の＜数は量の比＞と永遠に別れることになる。

参考：『学校数学はなぜ「数は量の抽象」を択ったのか？』
『量とは何か？——学校数学の「量」と数学の「量」』

3.2「かけ算の順序」の問いへの応じ方３タイプ

イデオロギーは，外部に問いが起こると，これを自陣に回収しようと試みる。これは，イデオロギーの性分である。
「数の積の順序」の問いが起こるとき，＜数は量の抽象＞のイデオロギーはこれを自陣に回収しようとする。

しかし＜数は量の抽象＞は，「かけ算」そのものができない。「かけ算の順序」の自説を唱えると，数の積の自分の論理が問われることになり，この論理の荒唐無稽を曝すことになり，結局墓穴を掘ってしまうことになる。
そこで，回収に乗り出す体 (てい) を一旦示したものの，すぐに後が続かなくなる。

「かけ算の順序」の問いにどのような格好で対応すれば，墓穴を掘らずに済むか？
一つに，思考停止を促すというやり方がある。
すなわち，「*かけ算の順序は，こだわるようなものではない。*」「*こだわるのは，愚である。*」と，相手を諭す体 (てい) をつくるのである。

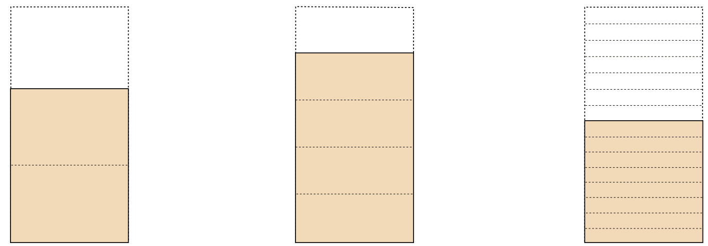
また一つに，問いを宙ぶらりんにするやり方がある。
すなわち，「*権威にたずねよう。*」と相手に応えるのである。
＜数は量の抽象＞の場合,「権威」は遠山啓ということになる。したがって「*遠山啓の著作を読もう。*」が，この場合の応えの形になる。

一方，「*＜数は量の抽象＞は正しい！*」の信念の固い者は，「かけ算の順序」の問題に対する＜数は量の抽象＞の答え (すなわち, 正しい答え) を,はっきり示したいと思うだろう。そして，こうしてつくられた論は，つぎのように結論するものになる：

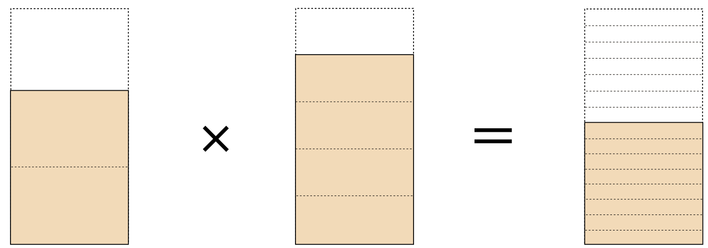
「*かけ算の順序は，厳格に定まる。*
　——こだわらなくてよいというものではない。」

なぜか？
以下，こうなる理由を説明する。

＜数は量の抽象＞でいくと, 分数 2/3, 4/ 5, 8 /15 は, つぎの量である:

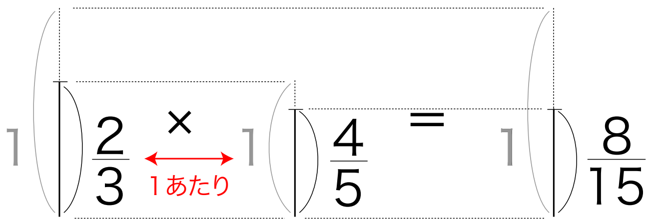


ところでこの 2/3, 4/ 5, 8 /15 は, 2/3 × 4/5 ＝ 8/15 の関係にある:



翻って，「×」はこの関係の或る読み方を示すものということになる。
しかし，この「或る読み方」はつくれるものではない。
そこで，＜数は量の抽象＞は，それでも「×」を「量 × 量＝量」にするために，つぎの解釈をつくる：

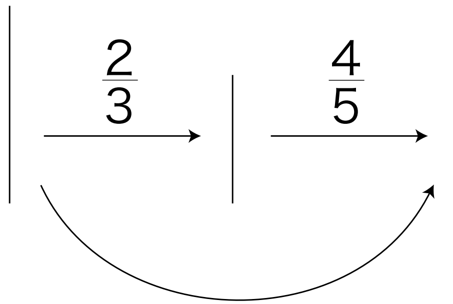
「2/3 × 4/5 ＝ 8/15」の前項の量は,「１あたり量」という量である。
そして, この２つの量の積は, つぎのようになるものである（註）:



そしてこの解釈では, 積の２数の意味 / 役割が違ってくるので, 積の順序も定めねばならなくなる。

こういうわけで, ＜数は量の抽象＞の立場に立っていることは,「かけ算の順序」の問いへの応え方が一つになることにはならない。「*悪しきこだわり*」タイプあり,「*遠山啓にあたってみよう*」タイプあり, そして「*かけ算の順序はどちらでもよいというものではない*」タイプあり, である。
「かけ算の順序」の問いに＜数は量の抽象＞はどのように応えているか？ を見ようとするときは, このあたりを間違わないようにしなければならない。

註：数学の＜数は量の比＞では,「2/3 × 4/5 ＝ 8/15」の図式はつぎのようになる：



$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \left(= \frac{8}{15} \right)$$

＜数は量の抽象＞の図式を＜数は量の比＞の図式と比べることで, ＜数は量の抽象＞の図式の無駄が見えてくる。 ——数学を知っている者なら, この「無駄」をさらに「循環論法」の言い方で説明できるだろう。

3.3　イデオロギーは，引っ込みがつかない

＜数は量の抽象＞が数学として持ち堪えられないものであることは，少し専門数学をかじった者ならわかる。＜数は量の抽象＞がずっと続いているのは，これがイデオロギーだからである。

イデオロギーのイデオロギーたる所以は，「*引っ込みがつかない！*」と＜己のアイデンティティーの拠り所＞がこれを持続させているメカニズムだということである。

＜数は量の抽象＞は，遠山啓がつくり出した論である。このとき遠山は，「現行に対立軸を立てる」を自分に課す者であった。
対立軸を立てるというスタンスは，必ず無理をさせる。
無理は，後になって「*思いつきでやってしまった！*」と後悔するものを，そのときは「*これだ！*」と思わせる。
遠山はこの無理をやってしまう。
そして間もなく，「*やってしまった！*」を自ら認めることになる。
しかし，「*これが正しい思想だ！*」をさんざ言ってきた。論争をやって，自分が正しく相手が間違っていると言ってきた。そして組織も，自分をすっかり指導者に立てて既に固まり，権力との対決を進めている。
「*いまさら引っ込みがつかない！*」

＜数は量の抽象＞を怪しく思うようになるのは，組織の幹部クラスにも当然ある。しかし，「*いまさら引っ込みがつかない！*」

一般組織員（現職教員）で＜数は量の抽象＞を怪しく思うようになってきた者も，「学校権力」とわたり合っている経緯から，「*いまさら引っ込みがつかない！*」

そして，イデオロギーは，己のアイデンティティーを形成する。アイデンティティーを壊さないために，無意識はイデオロギーを保持させる。

こうして，＜数は量の抽象＞はずっと続くことになる。

＜数は量の抽象＞については，数学教育界ではこれを論ずることが一種タブー視されているところがある。どうしてこうなるかというと，＜数は量の抽象＞を論ずることがイデオロギーを論ずることであり，そしてこれが「*引っ込みがつかない*」とか＜アイデンティティー＞とか人の痛いところを敢えて突っつくような格好になってしまうからである。

しかし，「*引っ込みがつかない*」は，周りを「一億玉砕」に導く。
そして，この「一億」の中には，学校の生徒も入ってくる。
こういうわけで，学校教育を考えるときは，「*タブーを眼中にしてなどいられない*」も必要なことになってくるのである。

４　＜数は量の比＞はイデオロギーか？

4.1　＜数は量の比＞は数学

考え方に「真実の正しいとらえ・真実の正しくないとらえ」の区別を立てる考え方を，イデオロギーと謂う。
＜数は量の抽象＞は，唯物論を立場とする。唯物論は，観念論を正しくないとするイデオロギーである。
＜数は量の抽象＞は，＜数は量の比＞を真実の正しくないとらえとして退け，自らを真実の正しいとらえとして立てる。＜数は量の抽象＞は，イデオロギーである。

＜数は量の比＞は，＜数は量の抽象＞から正しくないとされる考え方である。ところで，一つのイデオロギーによって正しくないとされる考え方は，このイデオロギーに対立するものになるという理由で，また一つのイデオロギーであるのか？

＜数は量の比＞は，イデオロギーではない。すなわち，「真実の正しいとらえ・真実の正しくないとらえ」という考え方をもっていない。

考え方には，「真実の正しいとらえ・真実の正しくないとらえ」の考え方をとらない / 退けるタイプのものが，もう一方にある。「約束事 (ルール)」という考え方である。
数学の考え方は，これである。
数学は，「約束事 (ルール)」の体系化を学として行う。この意味で，数学は「規範学」である。
そして，＜数は量の比＞は数学である。

4.2「＜数は量の比＞は数学」の内容

数学は，規範学である。
数学は，ひとが「現象」と呼ぶものの「写し」ではない。
数学は，ひとがそれでもって「現象」をつくるようになるところの，言語・規範をつくる。

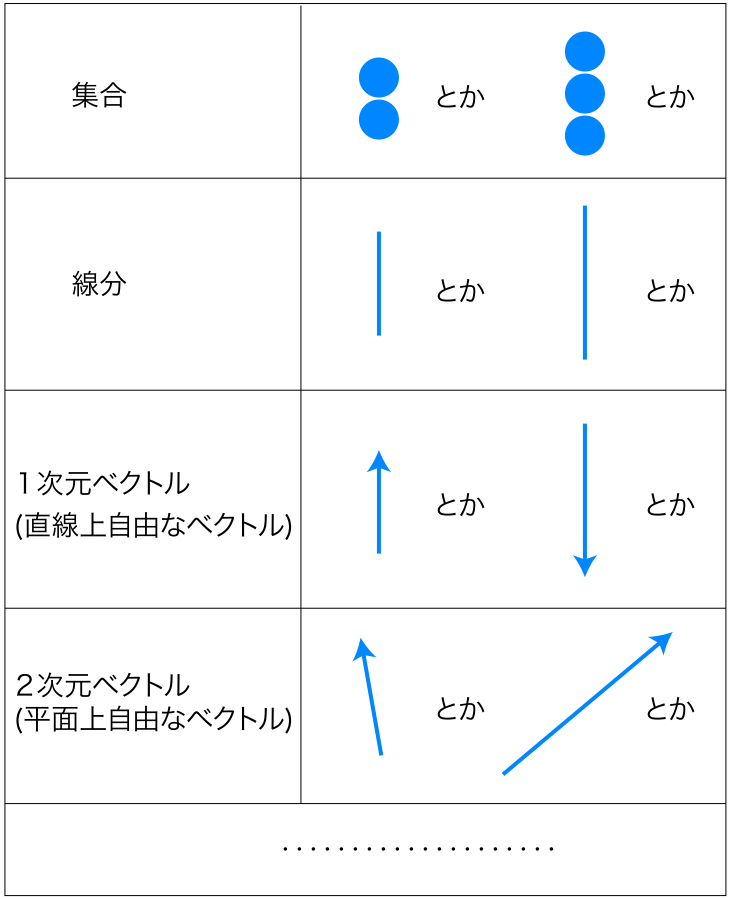
実際，数学は，《出発点にするルールを定め，これの含意を導く》を専ら行う。
＜外部＞は，(少なくとも理念的には) この行為の要素ではない。

そして以上の意味で，＜数は量の比＞は数学である。
この内容を，以下見ていくことにする。

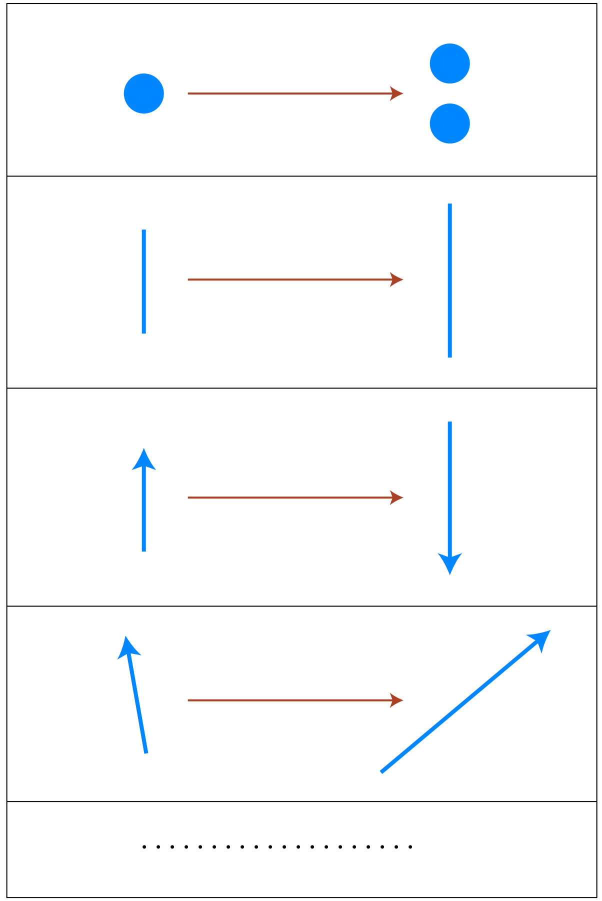
「数・量」の数学化は，結果的にはつぎのプロセスになっている：

1.「数」の概念化の端緒は, 日常語で「量」と呼ぶもの (個数, 長さ, 重さ，時間，移動，・・・・) 。

2. この「量」を担うものを，数学的に形式化する：

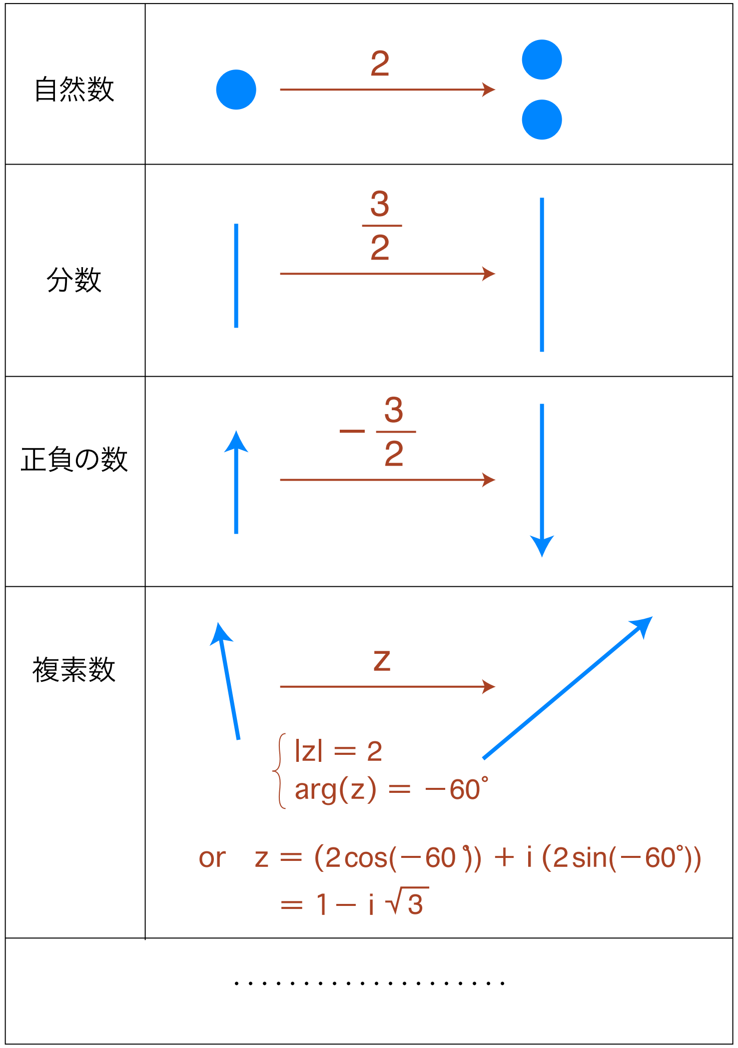


3. このときの「量」の比を，「数」の＜意味＞にする：



4. ＜意味＞を構成している形式をとりだし，この形式を「数」の＜定義＞にする。

5. 集合，線分，１次元ベクトル，２次元ベクトル，‥‥ のそれぞれにおいて，「数」になるものを＜実現＞する：



6.「数」の＜意味＞を論ずるときに使った 集合，線分，１次元ベクトル，２次元ベクトル，‥‥ を，「不純なもの」として消し去る。すなわち，自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥ のそれぞれで，つぎのことを行う (→ 『「数とは何か？」への答え』)：

(1) 数を素材にして，「量の普遍対象」をつくる。

((自然数 , ＋), ×, (自然数 , ＋ , ×))
((分数 , ＋), ×, (分数 , ＋ , ×))
((正負の数 , ＋), ×, (正負の数 , ＋ , ×))
((複素数 , ＋), ×, (複素数 , ＋ , ×))
‥‥

(2)「量の普遍対象」に同型なもののことを「量」と定義する。

((Q, ＋), ×, (自然数 , ＋ , ×))
　$\simeq$　((自然数 , ＋), ×, (自然数 , ＋ , ×))
((Q, ＋), ×, (分数 , ＋ , ×))
　$\simeq$　((分数 , ＋), ×, (分数 , ＋ , ×))
((Q, ＋), ×, (正負の数 , ＋ , ×))
　$\simeq$　((正負の数 , ＋), ×, (正負の数 , ＋ , ×))
((Q, ＋), ×, (複素数 , ＋ , ×))
　$\simeq$　((複素数 , ＋), ×, (複素数 , ＋ , ×))
‥‥

ここで「不純なもの」の意味は，これを無くさないと循環論法になるということ。──実際，量を担わせられた集合，線分，１次元ベクトル，２次元ベクトル，‥‥ は，数を構成要素に含むものになっている。

以上の過程を済ませて，数学は，形式としての「数」「量」を論ずるものになる。
「数」については，これの実現として，自然数，分数，正負の数，複素数，‥‥ をもっている。一方，「量」については，＜存在＞をもっていない。

参考：『「数とは何か？」への答え』

5　学校数学における「かけ算の順序」の主題の位置

5.1「順序」はつねに重要

「順序」は，数学に限らず，だいたいどこでも重要・肝心である。
少なくとも，数学・学校数学では，「*順序にこだわるのは愚*」を言う場面はない。

順序がつけられるとき，その行為に対しては意識的と無意識が区別される。数学の行為は，意識的行為である。数学の行為として行われた順序づけは，意識的行為である。

> 量計算の条件を構造化したところで積の立式に進むとき，積の２数の並びは，構造の含意として一意に決まってくる。
> 「*順序にこだわるのは愚*」を言う者は，だいたいが，積の立式に先立つ＜構造化＞のプロセスを考えていない。 すなわち，立式を＜問題の直接描写＞のように見ているのである。

積の式を立てるとき，「意識的な順序づけ」の概念をもたない子どもは，２数をただ並べる。この「ただ並べる」は，「こだわらない」ではない。「こだわるものをもっていない」である。
この子どもに対し，学校数学は「こだわる」を教えることになる。

しかしここに，「*順序にこだわるのは愚*」を言う者が出てくる。
これには大きく３タイプが考えられる：

A. 数学の素人であることが，「順序にこだわるのは愚」を言わせている。
B. 数学教育の素人であることが，これを言わせている。
C. 特定イデオロギーに即いていることが，これを言わせている。

自分の娘が学校でバツをくらったのを怒るモンスターペアレントは，A および B の場合である。
「*結果オーライで何の問題がある！*」を言ってくる者は，A もあるが，特に B の場合である。
そして，＜数は量の抽象＞を立場にして積の説明を持てない者は，A, B もあるが，特に C の場合ということになる。

学校数学の教授 / 学習は，それでなくとも，いちばんの大事となる＜意味＞と＜論理＞がないがしろにされる。「わかる（what・why)」をないがしろにしたところで，「できる（how)」をゴールにしてしまう。「できる」が「わかっていない」を隠蔽するようになっている。
よって，「順序」のことでは，教師は生徒にきっちりと「こだわる」を教えるのが正しい。
ただしこのときの順序の論理（→『「かけ算の順序」の数学』）をきちんと伝えられることが前提なのだが，この前提がアブナイということが，ここで問題になってくるわけである。

5.2「かけ算の順序」の学習が教員に必要

量の問題は，「問題の論理的還元のステップを進める」という形で解くことになる。
積の立式は，このプロセスの中で現れてくる。
そしてこの場合，問題をどう構造化したかで，積の立式での２数の並ぶ順序が自ずと決まる。

「量の計算問題」で学校数学が大事にしなければならないのは，生徒が「計算結果が答えと合う式を，ノウハウでつくれるようになる」ではない。「問題から数の計算式を導く論理的還元（推理）が，できるようになる」である。
そこで，学校数学の場合は「順序」が重要になる。 ——「順序」をどうでもいいことにしたら，「*学校数学は何をやるのか？*」という問題になる。

数学教育を志す人なら，「順序」の問題を「問題の論理的還元」の問題としてとらえられないというのは，困る。
そこで，最初に，数の積の立式の構造をきちんと理解されたい。

→ 積の意味（記号「×」の文法）
（『いろいろな数が「数」であること』）

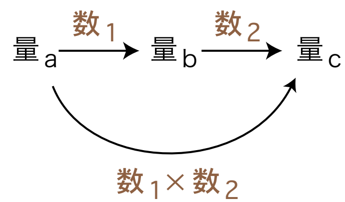
そして，「問題の論理的還元」を努めて練習されたい：

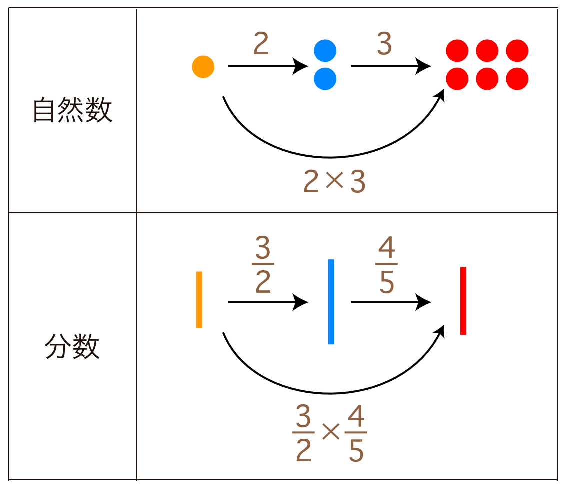
→ 問題の論理的還元——例：「３× ２」の立式の場合
（『「かけ算の順序」の数学』）

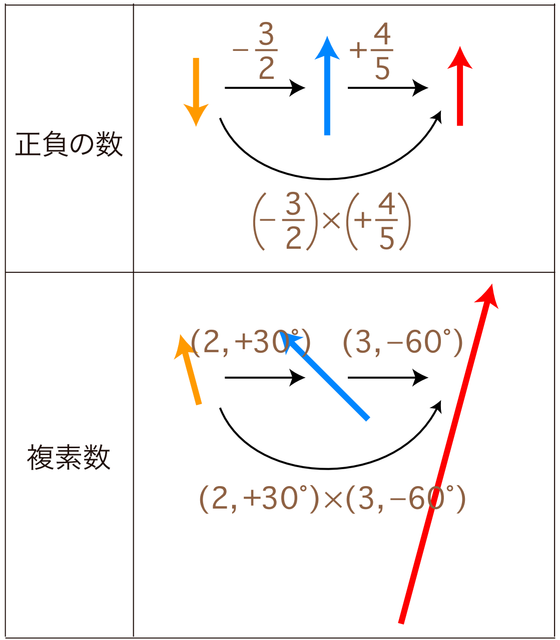
5.3「かけ算の順序」は現行では主題にできない

ここまで，「順序」はつねに重要であると論じ，「かけ算の順序」の学習が教員に必要であると論じた。しかしこの論を無しにするような言い方になるが，現行では，「かけ算の順序」は指導主題にすることができない。
なぜなら，学校数学の「かけ算」が，＜数は量の抽象＞が謂う「かけ算」であり，「かけ算の順序」の一貫した論理・形式——すなわち，「×」の文法——を扱えないからである。

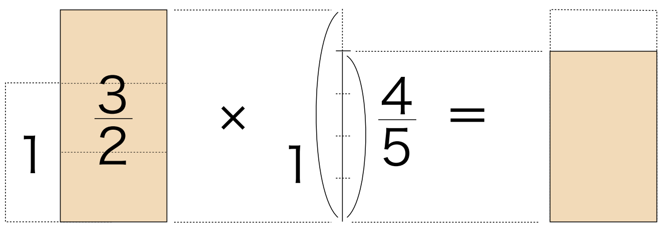
実際，「×」の文法はつぎのようであり，「かけ算の順序」の意味はこの「×」の文法に示されていることがすべてである：







これに対し，＜数は量の抽象＞の謂う「かけ算」は，つぎのような錯綜した図をいわば＜気持＞で飲み込んでいくというものになる：



そして＜気持＞で飲み込めるのもせいぜい分数までであり，正負の数，複素数では無理となる。
実際，＜数は量の抽象＞は，小学算数で閉じていることで——小学算数の先を見ないで済ますことで——保っている。そしてこのことがまた，小学算数を学校数学の中でますます特異なものにしていくのである。
(「算数は数学とは違うのだ！」の気分醸成)

5.4　実用論は「かけ算の順序」を＜こだわり＞の問題にする

実用論は「かけ算の順序」を＜こだわり＞の問題にする。
すなわち，「*かけ算の順序はこだわる問題ではない*」「*かけ算の順序にこだわるのは愚*」を言う。

いっぽう，ここで否定されている＜こだわり＞を生業としているのが，数学である。
「*かけ算の順序にこだわるな*」を言うことは，「*数学はやめよう*」を言うことである。

数学が＜こだわり＞を生業としているとは，どういうことか。
数学は，つぎのことを厳格に行おうとする：

1. 使用する言語を，文法の明確な言語として定める。
2. 理論生成の核にするルールを定める。
3. 「含意」のルールを定める。
4. 含意の導出作業を，核のルールを起点にして開始する。

なぜ，これを厳格に行おうとするかというと，「厳格」ということに意義を見ているからである。
翻って,「厳格」の概念に無知ないし「厳格」の意義に関心の無い者は,「厳格」をつまらないこだわりと感じることになる。そして「厳格」がこだわりにされるところでは，数学は生きられない。

数学は，理論構築において，実用は見ていない。
すなわち，理論構築の営みは,「*専ら重要な含意を求め，アブストラクト・ナンセンスはやらない*」の意識に導かれているとはいえ，たてまえとしては，実用論から独立している。
実際，「実用から独立」のスタンスが，「既成によって曇らされた眼では見えなかった形式」の発見へ導くことに効く。あるいは，このことが期されている。

5.5　イデオロギーは「かけ算の順序」を存在論にする

<数は量の抽象>のイデオロギーが「かけ算の順序」の問題を立てるときは，「かけ算の順序」は存在論にされる。そして，「かけ算の順序」の存在論は，数学ではない。

数学は，ルールの体系化を営みとする規範学である。使用する言語を文法の明確な言語として定め，理論生成の核にするルールを定め，「含意」のルールを定め，核のルールを起点にして含意の導出作業を開始する。
存在 (対象) も，自分の中でつくる。

数学の命題は，つぎの形をしている：

「*もしこのような存在があれば，それはこうなっている。*」

数学が存在を自分の中でつくるのは，存在の雛形（「普遍対象」）をつくるためである。
すなわち，普遍対象としてつくった存在は，つぎの形の命題をつくるのに使われる：

「*この存在と同型の存在は，こうなっている。*」

「この存在と同型の存在」という言い方が使えることは，「このような存在」の言い方を著しくラクにする。(「人」を使わないで「人と同じ形のもの」を言おうとしたらどうなるかを，想像されたい。)

<u>数学が自分でつくったものでない存在は，数学の対象ではない</u>。

例えば，「長さ」「重さ」「時間」「速さ」等の日常語で「量」と呼んでいるものは，数学の対象では<u>ない</u>。
数学の対象である「量」は，つぎのものである：

1. 数学が自らつくった数の系 (数 , ＋ , ×) を素材にして，
2. 「量」の普遍対象として系 ((数 , ＋), ×, (数 , ＋ , ×)) をつくり，
3. これと同型なもののことを「量」と呼ぶ。

数学が自らつくったものだけが数学の存在であるということは，よく理解されていない。これは数学を考えるときの重要な点なので，強調しておく。
実際，数学は自分で存在をつくるので，特に，哲学的存在論 (イデオロギー) の雑音から離れていられるのである。 ――例えば，つぎのことをよくよく確認されたい：《数学の命題は，これに対して「賛成・反対」の立場が現れてくるようなものではない。》

おわりに

学校数学は，＜数は量の抽象＞である。学校数学の「数」を考えることは，＜数は量の抽象＞を考えることである。
特に，「かけ算の順序」が学校数学の問題として上がってきたとき，これを考えることは＜数は量の抽象＞の「かけ算の順序」を考えることである。

「かけ算の順序」の問題化は，「かけ算」の問題化に進む。
ところで，＜数は量の抽象＞は，「かけ算」で窮するものになっている。
＜数は量の抽象＞では，数の積は量の積でなければならず，そして量の積というものは無いからである。
したがって「かけ算の順序」の問題化は，＜数は量の抽象＞にとってあまりありがたくないものになる。

＜数は量の抽象＞は，唯物論のイデオロギーを基にする。
唯物論の眼から数学を見れば，数学は観念論である。そこで，「数学は唯物論の立場から建て直されねばならない」が，その時代の現行への対立軸になる。これが，＜数は量の抽象＞である。
なぜこれがすごく大したことのように思われたのかは，その時代に生きてみなければわからない。時代のムードとはこういうものである。
そして内容が荒唐無稽でも勝ってしまうのは，「論争」であるからだ。
シンパ･支持者を多くつけたものが勝つ。シンパ･支持者はムードに寄って来る。内容で勝つのではない。

そしていまわれわれが，学校数学で＜数は量の抽象＞の奇態な数概念・量計算が生徒に指導されているのを，目前にしているわけである。

＜数は量の抽象＞を保守する格好を自ら示しているのは数教協であるが，それ以上に学校数学がこれを保守してきた。
＜数は量の抽象＞のアヤシイことは，専門数学を少しやった者ならすぐにわかる。実際，数学なら＜数は量の比＞である。そこで，「*＜数は量の抽象＞は，引っ込みがつかなくて続いているのだ*」とわかる。

この「引っ込みがつかない」に，生徒が付き合わされている。
「引っ込みがつかない」者たちに生徒が付き合わされることが，「教育」になっている。＜数は量の抽象＞は「教育」され, 世代的に再生産される。
「学校数学は永遠に＜数は量の抽象＞」の構造ができあがっている。

唯物論のイデオロギーは後退したが，学校数学の「数と量」になって形を残した。分水嶺のどちらの側に落ちるかを決めるのは偶然だが，一旦落ちてしまえば，＜梃子でも動かない＞ものになる。

いま，数学をわかった数学教育関係者で「*学校数学が＜数は量の抽象＞になってよかった*」「*世代から世代へ確実に引き継がれる形になってよかった*」と思う者は，いかほどか？
＜数は量の抽象＞の側にいるが, それは引っ込みがつかないためであり,「*やってしまった*」の感 (後悔) を密かにもっている者も，多いはずである。

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

http://m-ac.jp/me/instruction/subjects/number/composition/ideology/

宮 下 英 明 (みやした ひであき)

1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

図解　現職教員・教員養成コース学生＆数をわかりたい人のための

「かけ算の順序」論争がわかる本 (4)

「かけ算の順序」のイデオロギー

2010-03-30　初版アップロード (サーバー：m.iwa.hokkyodai.ac.jp)

2010-05-28　サーバー変更 (m-ac.jp)

2011-01-29　ウェブサイト『「かけ算の順序」の数学』を,『「かけ算の順序」の数学』と『「かけ算の順序」のイデオロギー』に分割

2011-02-02　オンラインブック『「かけ算の順序」のイデオロギー』(本テクスト) をアップロード

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp

http://m-ac.jp/

m@m-ac.jp