図解

現職教員・教員養成コース学生
＆数をわかりたい人のための

「数」の数学 対 学校数学 (3)

学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要

Ver. 2012-04-15

北海道教育大学教授
宮下英明 著

文中の青色文字列は，ウェブページへのリンクであることを示しています。

「数」の数学対学校数学 (3)

学校数学の「かけ算･わり算」のとらえには，数学が必要

本書について

本書は，

http://m-ac.jp/

のサイトで書き下ろしている

学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要

を PDF 文書の形に改めたものです。

本シリーズについて

本書は，「「数」がわかる本」として作成しているシリーズのうちの，＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの 3 になるものです。

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズの趣旨は，読者が学校数学の中の「数」を数学の「数」と対比できるようにすることです。

本シリーズは，＜「数」がわかる本＞シリーズに後続する内容になっています。
学校数学の「数」は，数学の「数」とは違っています。特に，学校数学の「数」は，数学になっていません。学校数学の「数」に対するときは，このことを理解している必要があります。そして，このことの理解には，数学の「数」の理解が含まれるわけです。

「「数」がわかる本」シリーズは，現在かなり大部になっています。そこで，この内容の＜早わかり＞としてつぎのテクストを用意していますので，利用してください：

『「数の理解」15 講』

「数」がわかる本 既刊一覧

＜「数」がわかる本＞シリーズ　(数学の「数」)

- 「数とは何か？」への答え
- いろいろな数が「数」であること
- いろいろな数がつくられるしくみ
- 四元数
- 量計算の論理
- 「数の理解」15 講
- 「小数」の数学

＜「数」の数学対学校数学＞シリーズ　(イデオロギーの「数」)

- 数は量の比 ―「数は量の抽象」ではない
- 量とは何か？―学校数学の「量」
- 学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要 (本テクスト)
- 「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ
- 「数直線でかけ算・わり算」は，わかるのがおかしい

＜「かけ算の順序」論争解説＞シリーズ　(モンスターの「数」)

- 「かけ算の順序」論争概説
- 「かけ算の順序」論争――延々と続けられるわけ
- 「かけ算の順序」の数学
- 「かけ算の順序」のイデオロギー

目次

本文イラスト，ページレイアウト，表紙デザイン：著者

はじめに

算数・数学の科目の内容は，明証的であると思われている。
算数・数学ができる・わかるとは，理に則って考えられることだと思われている。
翻って，算数・数学ができない・わからないとは，理に則って考えられないことだ，となる。
そして，理に則って考えられないのは，アタマがわるいからだ，となる。

ここで，もし算数・数学の科目の内容が決して明証的ではないとしたら，どうだろう？
生徒も授業者も，明証的でないものを明証的であると思い，自分のうちで明証的にしようとし，それができないことを自分のアタマのせいにしてしまう。
教員だったら，さらに，＜できなくてもできるふり＞を強迫観念にしてしまうかも知れない。

「分数・小数のかけ算・わり算」の現行指導は，立式・計算のきまりの説明が，わからないものになる。そして，生徒も授業者も，わからないのを自分のアタマのせいにしてしまう。
しかし，「分数・小数のかけ算・わり算」の立式・計算のきまりの現行の説明は，もともと明証的でない。説明を呑み込む者が＜できる・わかる＞者になり，説明を呑み込めない者が＜できない・わからない＞者になる。

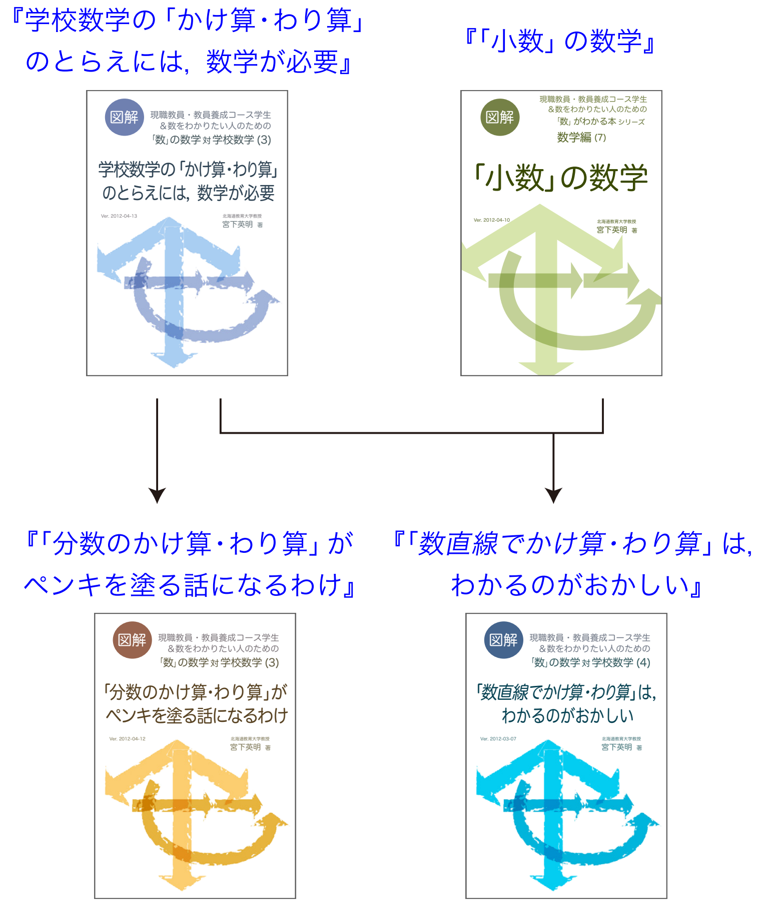
明証的でないことは，「明証的」を知らねばわからない。
明証的な「分数・小数のかけ算・わり算」はどこにあるかというと，数学にある。
そこで，つぎが，「分数・小数のかけ算・わり算」の現行指導の非明証性を示す方法になる：

「分数・小数のかけ算・わり算」の現行指導の内容に，
「分数・小数のかけ算・わり算」の数学を対置する。

対置作業は，これに先だって，「分数・小数のかけ算・わり算」の数学の押さえをやっておく必要がある。
この押さえを，本テクストを以て行う。

本テクストの位置づけ

本テクストには，「対置」(「分数・小数のかけ算・わり算」の学校数学に数学を対置)のテクストが後に続く。
現時点では，本テクストはつぎのように位置づく：



1.「学校数学のかけ算・わり算の非明証性」の主題化

1.0　要旨

学校数学の分数・小数のかけ算・わり算の学習には，困難がある。
学習困難のいちばんの理由は，内容が明証的でないことである。
理解するとは，明証的に理解するということである。しかし，もともと明証的でないものの明証的理解は，失敗するのみである。

一方，学習者は，学習内容の明証性を，疑い得ないものにしている。
そして，このことは，教員にもあるとしなければならない。
そこで，学校数学の分数・小数のかけ算・わり算の非明証性（以下，＜非明証性＞という）を，ここに主題化する。

＜非明証性＞には，３つの面がある。
一つは，学校数学の分数・小数のかけ算・わり算の内容が，数学を過剰に用いるふうになっていることである。
過剰であるから，循環論法もやっている。そして，かなり高度な数学を用いている。
これらの数学は，指導の中では非明示的に扱うしかない。そして，非明示的に扱うということは, 内容が非明証的になるということである。

一つは, 数学を＜存在の事実の論述＞にしていること――この意味で, リアリズムをやっていること――である。
存在の事実は，明証することではない。呑み込むのみである。

そして＜非明証性＞のもう一つの面は，＜数は量の抽象＞の立場である。

これは，量をリアルの側に措くタイプのリアリズムである。
数学は＜数は量の比＞である。＜数は量の抽象＞は最初から無理な立場である。そして，無理な立場は，無理な論法を強いる。こうしてつくられるかけ算・わり算は，異形であり，そして非明証的である。

ここに示した＜非明証性＞の内容は，数学との対照・対比を以て明らかにされるものである。

1.1　かけ算・わり算の非明証的内容がもとの学習困難

1.1.1　かけ算・わり算の非明証的内容が，学習困難のもとに

学校数学の分数・小数のかけ算・わり算の学習には，困難がある。
小学生だから困難なのではない。
実際，分数・小数のかけ算・わり算を数学で知っていれば，それだけかえって，学校数学の分数・小数のかけ算・わり算は受け付けられなくなる。

学校数学の分数・小数は，独特である。
これの学習が困難になるいちばんの理由は，内容が明証的でないということである。
学習者は，内容を明証的であると思っていて，これを明証的に理解しようとする。しかし，もともと明証的でないので，この理解作業は失敗する。

1.1.2　明証的でない学習内容は，呑み込むしかない

学校数学の分数・小数は，内容が明証的でない。
学習者は，内容を明証的であると思っていて，これを明証的に理解しようとする。しかし，もともと明証的でないので，この理解作業は失敗する。

学習者は，この失敗を，自分のせいにする。
また，失敗のままというわけにはいかないので，内容を呑み込むという方略で，課題をやり過ごしていくことになる。
学習者にとって，学校数学は疑い得ないものなのである。

学校数学を疑い得ないものにすることは，教員にもあるとしなければならない
実際，数学をよく知っていなければ，学校数学は疑い得ないものにするしかないのである。

1.2「かけ算・わり算の非明証性」の内容

1.2.1　内包する数学の過剰と循環論法──非構成主義

学校数学の分数・小数のかけ算・わり算は，内容が数学を過剰に用いるふうになっている。
過剰であるから，循環論法もやっている。
そして，かなり高度な数学を用いている。

これら＜過剰な数学＞は，暗黙に用いることになる。 ──実際，「明示して指導する」はできないわけである。
そして，暗黙に用いるということは，内容が非明証的になるということである。

学校数学における数学の過剰と循環論法は，学校数学が数学の構成主義を立場にしていないことに因る。
構成主義とは，＜最小を積む＞を構成の方法にして数学をつくる立場をいう。
既に積んだものを再度積むことは，過剰であり，定めし循環論法をおかしている。

学校数学の分数・小数のかけ算・わり算を，数学のそれと対比するとき，数学のスッキリ感に対し，学校数学はグチャグチャ感がもたれる。
これが，ここでいう「非明証性」の内容である。

1.2.2　数学に対する＜存在法則＞の見方

学校数学には，数学を＜存在法則＞に見なすような部分が認められる。
「形式不易の原理」「比の３用法」が言い出されるときは，この場合である。

＜存在法則＞は，これの適用領域が明証無用領域になるため，非明証性のもとになる。

1.2.3　＜数は量の抽象＞の立場

学校数学は，＜数は量の抽象＞を立場にしている。

＜数は量の抽象＞では，存在の事実として量の事態があり，数の立式・計算はこれの抽象ということになる。
抽象は，明証することではない。受け入れるのみである。
受け入れ難いときは，呑み込むのみである

こうして，学校数学の＜数は量の抽象＞の立場は，分数・小数のかけ算・わり算の内容を非明証的にしていく。

1.3「かけ算・わり算が内包する数学」の同定へ

学校数学の分数･小数のかけ算･わり算は，構成･内容に明証性を欠く。
そして，この理由につぎの二つが認められる：

1. 数学の過剰な使用
2. ＜数は量の抽象＞の立場

以上のことは，数学との対照･対比を以て明らかにされるものである。

本論考は，「対比」で用いられることになる数学を，取り上げる。
このときの数学の位置づけは，

「学校数学の分数・小数のかけ算・わり算の非明証性の内容を，数学との対比によって，明らかにする」

であり，

「学校数学の分数・小数のかけ算・わり算が＜教える内容＞として妥当かどうかを，数学を規準にして判じる」

ではない。
実際，教育は，方便を用いる。指導内容の明証性と教育効果は，互いに関係し合うが，別の問題として扱わねばならない。 ──そうしないと，論点が拡散し，収集のつかないことになる。

2. 「数」の数学

2.0　要旨

はじめに，学校数学のかけ算･わり算の非明証性に対比するところの，
数学のかけ算・わり算の「明証性」の内容を示す。
以下が，この内容になる：

1. 数が＜量の比＞であるということ
2. 「×」「÷」の意味
3. 文章題に対するかけ算・わり算の立式・計算が，＜表現の還元＞を行う推論であるということ

一般の読者は，この内容に最初戸惑うことになる。
なぜなら，学校数学は数を＜量の抽象＞と教えてきているからである。
学校数学は，リアルな世界として量の世界を立て，数も，×，÷ も，立式も計算も，すべて量の世界の写しであると教える。
読者は，数学をリアルな世界の写生としてやらされてきており，特に，量の写生として数を描くカラダをつくってきているのである。

「かけ算・わり算」の数学は，このようなものではない。
一般に，数学は，リアルな世界を写生する行為ではない。
リアルな世界に対し認識行動する人間，その人間の認識に形式を見出し，その形式を理論的に再構成する行為である。
「写生」の言い回しを使うとしたら，数学は認識形式を写生対象にする。

2.1「数」の意味——＜数は量の比＞

数の出自は，量表現 / 量計算である。
この出自がそのまま「数」の数学へと整えられる。

量表現/量計算の中の数は，＜量の比＞ないし＜量の倍作用＞である。

$$量_a \xrightarrow{数} 量_b$$

「2/3 dL」は量 dL の 2/3 倍のことである。

$$dL \xrightarrow{\frac{2}{3}} 「\frac{2}{3}dL」$$

「1 dL」は dL の 1 倍のことであり，これは dL と同じである。

$$dL \xrightarrow{1} 「1dL」$$

「何 dL」「何 m^2」と問うときの「何」は数である。「何 dL」は dL の「何」倍のことである。

$$dL \xrightarrow{何} 「何dL」$$

2.2　記号「×」の文法

量表現 / 量計算の中の数は，＜量の倍作用＞である。
数の積は，「倍の合成」になるように定義される。
すなわち，数の積は，量に対してつぎのように用いるものである (記号「×」の文法)：

$$\begin{tikzcd} 量_a \arrow[r, "数_1"] \arrow[rr, bend right, "数_1 \times 数_2"'] & 量_b \arrow[r, "数_2"] & 量_c \end{tikzcd}$$

量に対する数の倍作用を「$\boldsymbol{\times}$」(下付けのゴシックの「×」) で表すことにすると，上の図式は，量 **q**，数 m，n に対するつぎの式に同じである：

$$(\mathbf{q} \boldsymbol{\times} m) \boldsymbol{\times} n = \mathbf{q} \boldsymbol{\times} (m \times n)$$

本論考は，＜倍の可換図式＞を随所で用いていくことになる。ところで，倍の可換性を示す目的では，量の表記は実質機能しないふうになる。そこでこのような場合，量の表記を「・」で代用したつぎのような表現を，適宜用いることにする：

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "m"] \arrow[rr, bend right, "m \times n"'] & \cdot \arrow[r, "n"] & \cdot \end{tikzcd}$$

2.3　記号「÷」の文法

記号「÷」は，積が可換な数の系 N (自然数，分数，正負の数，複素数，等) において，つぎのように使う：

> つぎの式を満たす数？を「n ÷ m」と書く：
> $m \times ? = ? \times m = n$

m×○＝○×m＝n

「n ÷m」

「÷」に関してはこれだけである。「÷」の意味としてこれに加えるものはない。
実際，この単純な意味を以て，自然数，分数，正負の数，複素数等に共通の「÷」になる。

2.4「かけ算・わり算の立式・計算」の数学 —— ＜表現の還元＞の推論

量の文章題を解くとは，これを数の式に還元することである。

例として，つぎの文章題を考える：

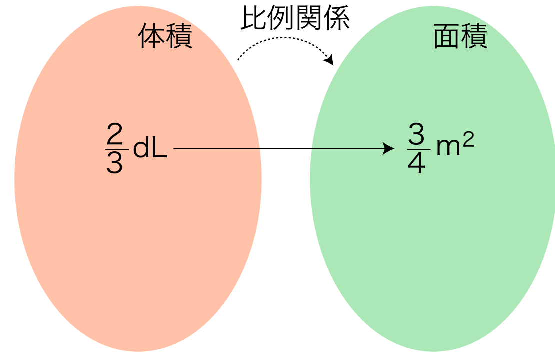
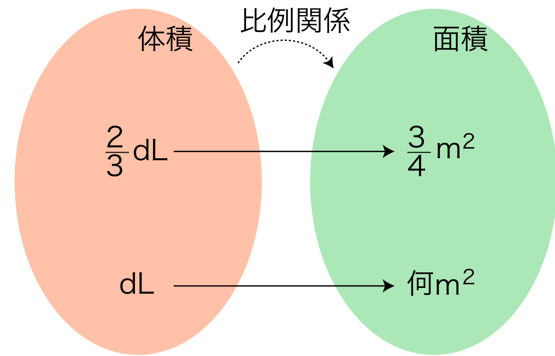
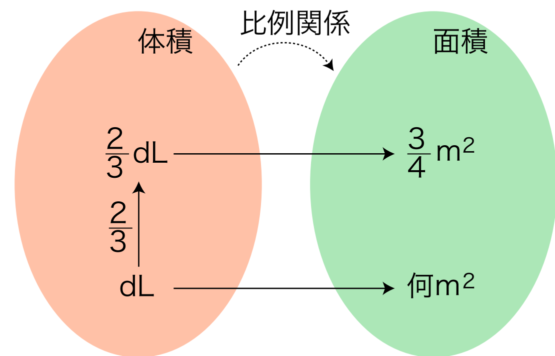
> 板にペンキを塗る。
> 2/3 dL のペンキで 3/4 m^2 塗れるとき，
> 1 dL では何 m^2 塗れるか？

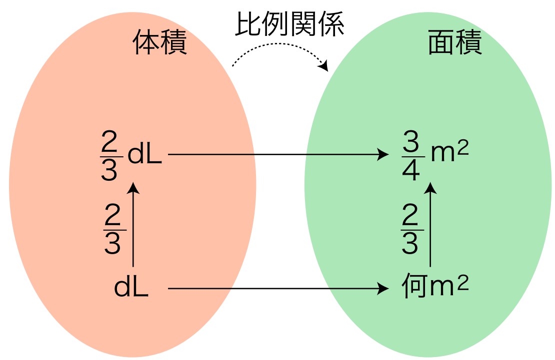
これは，直接には，体積 (かさ) と面積の比例関係の問題になる：

> 2/3 dL に 3/4 m^2 が対応するとき，
> dL には何 m^2 が対応するか？

比例関係とは，二つの量の系の間の関係で，「一方の 2, 3, ‥‥ 倍にもう一方の 2, 3, ‥‥ 倍が応じる」というものである。特に，一方の分数倍にはもう一方の同じ分数倍が応じる。

2/3 dL は量 dL の 2/3 倍のことであり，3/4 m^2 は量 m^2 の 3/4 倍である。
問われている「何 m^2」の「何」は数であり,「何 m^2」は m^2 の「何」倍のことである。
そこで，つぎが「数の式への還元」の推論になる：

問題	2/3 dL に 3/4 m^2 が対応するとき， dL には何 m^2 が対応するか?	
問題を図式化	2/3dL に 3/4m^{2}が対応	
	dL に何 m^2 が対応	
「比例関係」 の適用	「2/3dL」 を分析	

	一方の 2/3 倍に他方の 2/3 倍が対応	
倍関係の問題として解く	倍関係の問題に還元された	$何\,m^2 \xrightarrow{\frac{2}{3}} \frac{3}{4}\,m^2$
	「何m²」と「3/4m²」を分析	$\begin{tikzcd} m^2 \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "\frac{3}{4}"'] & 何\,m^2 \arrow[r, "\frac{2}{3}"] & \frac{3}{4}\,m^2 \end{tikzcd}$
	「×」の文法	$\begin{tikzcd} m^2 \arrow[r, "何"] \arrow[rr, bend right, "\frac{3}{4} = 何 \times \frac{2}{3}"'] & 何\,m^2 \arrow[r, "\frac{2}{3}"] & \frac{3}{4}\,m^2 \end{tikzcd}$
	「÷」の文法	$何 = \frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$

この例に見るように，文章題を還元してわり算の式に至るのは，わり算の式の直前にかけ算の式への還元ができていて，このかけ算の式の変形としてわり算の式が導かれる場合である。

特に，文章題に「かけ算の文章題」と「わり算の文章題」の別があるわけではない。

倍の合成の可換図式でどの倍が未知かということで，その倍を表す式がかけ算になったりわり算になったりする。「<倍の合成の可換図式>に還元される文章題」が，「かけ算･わり算の文章題」の意味である。

3. 「分数」の数学

3.0　要旨

分数は,「任意の自然数 n に対して＜ n 等分＞が可能な量」の概念をつくるとき，これに伴ってつくられる数である。
「量の概念をつくるのに伴って数がつくられる」の意味は,「量の比として，数がつくられる」である。

ここでは,「分数」の数学のうち，本論考にとって必要最小限の内容となるところの，つぎの内容を押さえる：

1. 分数の定義――分数倍の図式
2. 分数の求積・求商計算――推論として

3.1 「分数倍」の図式

ここでは，分数倍の定義になる図式 (可換図式 commutatve diagram) を確認する。

二つの量 a，b における「a の 3/4 倍が b」の意味は,「a と b を共約する量で，これの４倍と３倍がそれぞれ a，b になるものが存在する」である：

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, "4"'] \arrow[dr, "3"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

これは,「a の３倍と b の４倍が等しい」と言っても同じである：

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "3"] & & b \arrow[dl, "4"'] \\
 & \bullet &
\end{tikzcd}
$$

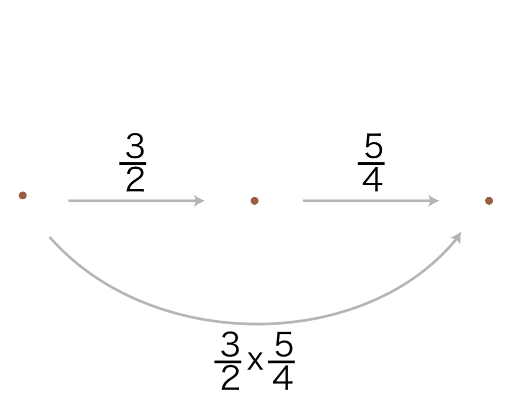
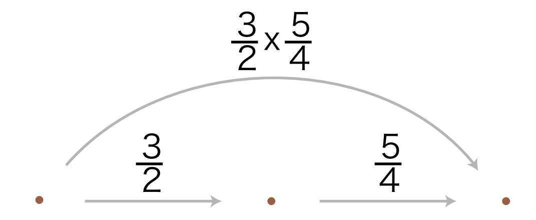
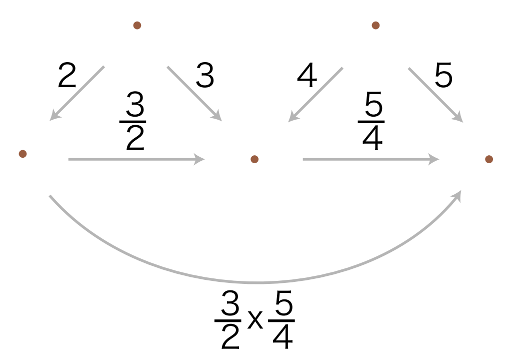
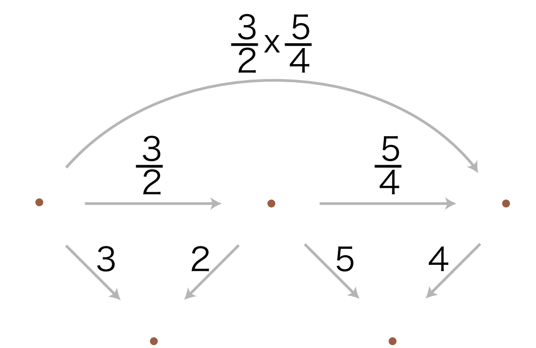
そこで，分数倍の定義はつぎの可換図式に表現される：

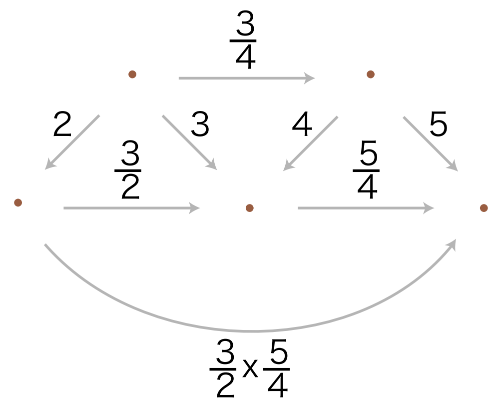
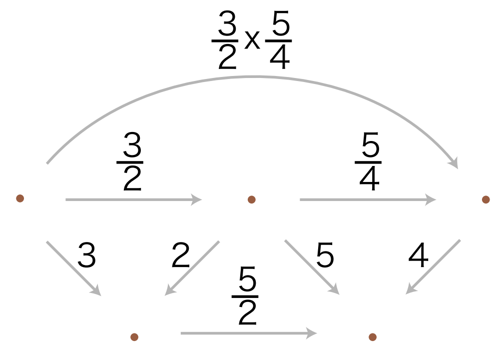
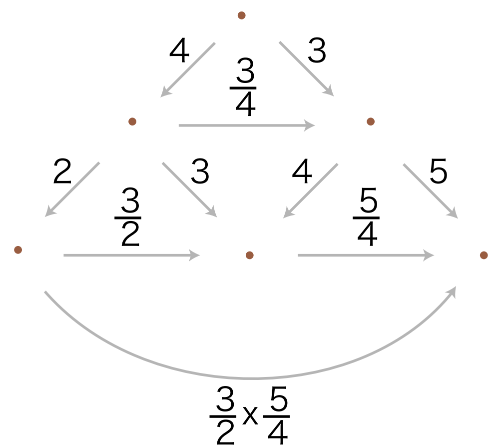
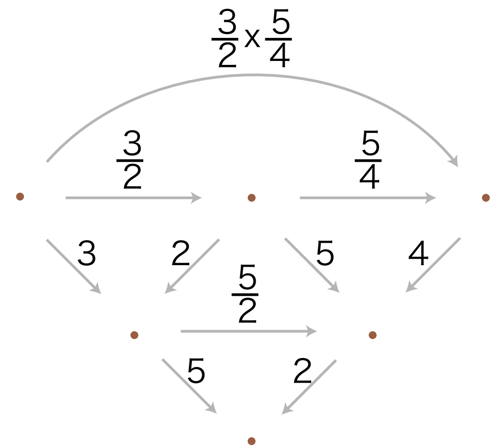
$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dl, "4"'] \arrow[dr, "3"] & \\
\bullet \arrow[rr, "\frac{3}{4}"] \arrow[dr, "3"'] & & \bullet \arrow[dl, "4"] \\
 & \bullet &
\end{tikzcd}
$$

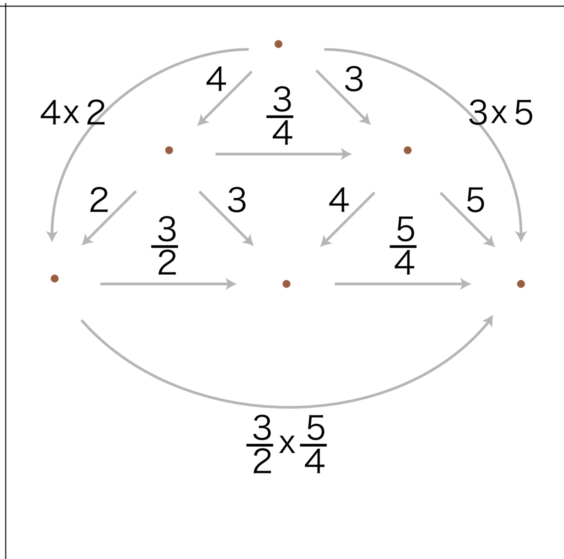
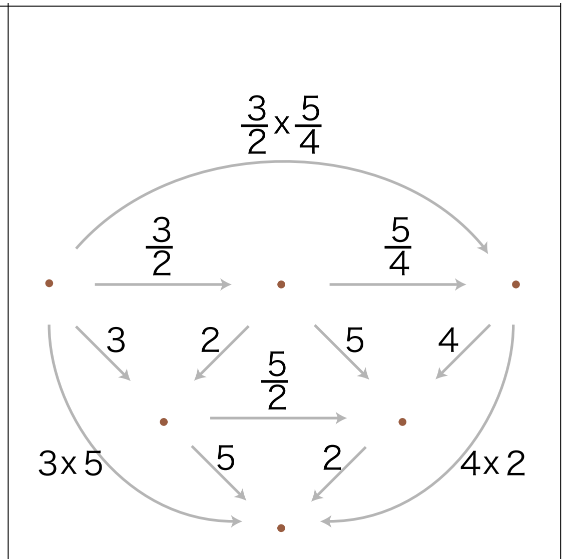
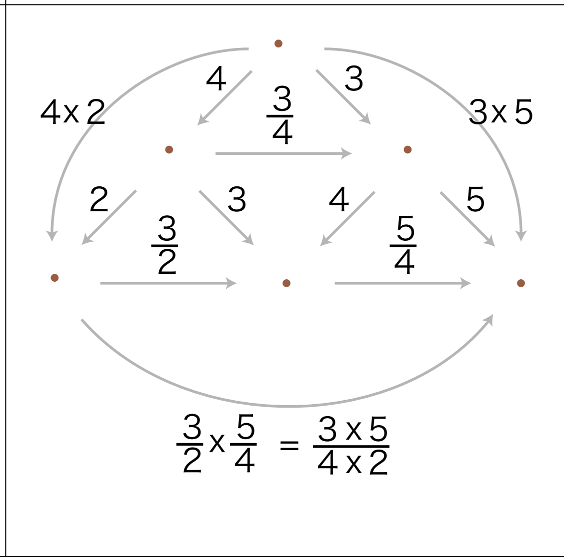
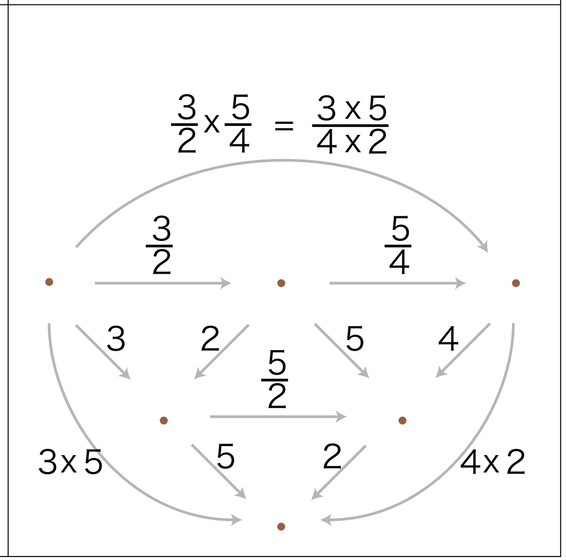
2.2.1.2　分数の求積公式を導く推論

「分数のかけ算」の推論は，以下に示すものになる。

> 分数倍を定義する可換図式は，二通りに書けた。
> (→ §「分数倍」の図式)
> ここでは，この二通りに応じる二通りの推論を示しておく。

	3/2 × 5/4	
「×」の文法		
分数の定義		

分数の定義	3/4 2 3 4 5 3/2 5/4 3/2 x 5/4	3/2 x 5/4 3/2 5/4 3 2 5 4 5/2
分数の定義	4 3 3/4 2 3 4 5 3/2 5/4 3/2 x 5/4	3/2 x 5/4 3/2 5/4 3 2 5 4 5/2 5 2

「×」の文法		
分数の定義		

こうして，つぎが「分数のかけ算のきまり」になる：

　　「*分母同士掛けたもの分の，分子同士掛けたもの*」

3.3　分数の求商公式を導く推論

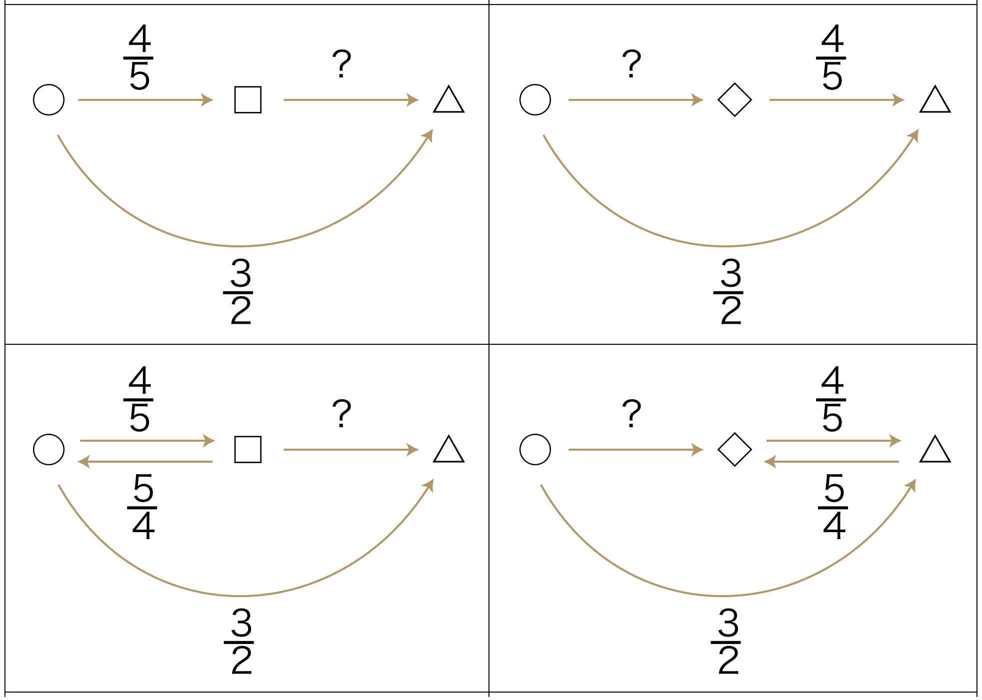
「分数 ÷ 分数」が「分数をひっくり返して掛ける」になる論理 (数学) を，ここで押さえる。

「3/2 ÷ 4/5」で考えよう。
これは，つぎの式を満たす数？である (→ § 記号「÷」の文法) :

$$4/5 \times ? = ? \times 4/5 = 3/2$$

これより，つぎの推論になる：

4/5 × ? ＝ 3/2	? × 4/5 ＝ 3/2



○は□の 5/4 倍であり， ○の 3/2 倍は△なので， □の 5/4 倍の 3/2 倍が△。 よって，？=5/4× 3/2	◇は△の 5/4 倍であり， ○の 3/2 倍は△なので， ○の 3/2 倍の 5/4 倍が◇。 よって，？= 3/2 × 5/4
3/2 ÷ 4/5 ＝ 3/2 × 5/4	

そして，結論された等式を，つぎのように表現するわけである：

「分数 ÷ 分数は，割る分数の方をひっくり返して掛ける」

3.4　自然数の分数への埋め込み

自然数の「×」と分数の「×」は，それぞれ自然数の内算法，分数の内算法ということで，別物である。
一方，自然数と分数の積の式を立てることがある。
以下が，これの意味である：

> 自然数の系を分数の系に埋め込む (embedding)。埋め込みの方法は，《分数ｎ／１を自然数ｎと同一視する》である。
> 自然数が分数と見なせるものになったので，分数の「×」をはさんで自然数と分数の相並ぶことが可能になる。

4. 「小数」の数学

この内容は，つぎのテクストで：

『「小数」の数学』
http://m-ac.jp/me/subjects/number/rational_decimal/

5.　「量」の数学

5.0　要旨

「分数・小数のかけ算・わり算」の現行指導の内容をとらえるには，「量」の代数的構造，この構造に関する同型，量の普遍対象としての＜量としての数＞の数学が必要になる。
この数学を，本節で示す。

内容は，かなり専門的である。
一方，テクストは，ごく簡潔な説明にとどめている。
読者は，このテクストに限らず，以下のテクストをもとにじっくり内容の理解に努められたい：

『「数の理解」15 講』
『「数とは何か？」への答え』

5.1　量の代数的構造

ここでは，用語を定めつつ，量の代数的構造を押さえる。

「重さ」と言うとき，個々の重さを指す場合と，カテゴリーとしての重さを指す場合の，二通りがある。これを区別するために，前者を「重さ (要素)」，後者を「重さ (系)」と言い表すことにする。
また，重さ，長さ，時間等々の量の一般名称として「量」のことばを使うときは，「量 (要素)・量 (系)」の言い回しを用いる。

数学は, 量 (系) を＜構造をもった集合＞ととらえる。この集合の要素が, 量 (要素) である。

量 (系) は，つぎの意味で，数 (系) を構成要素にしている：

《量 (要素) に対する数の倍作用が定義されている。》

「数」にも，自然数，分数，正負の数，複素数等々，いろいろある。
そして，たとえば「分数」と言うとき，個々の分数を指す場合と，カテゴリーとしての分数を指す場合の，二通りがある。これを区別するために, 前者を「分数 (要素)」, 後者を「分数 (系)」と言い表すことにする。
また，自然数，分数，正負の数，複素数等々の数の一般名称として「数」のことばを使うときは，「数 (要素)・数 (系)」の言い回しを用いる。

以下，量 (系) の代数的構造を示す。

数学は，量 (系) を「構造をもった集合」ととらえる。

量 (系) Q の要素２つに対しては，和が考えられている。
Q の要素 $\mathbf{q}_1$ と $\mathbf{q}_2$ に対し，これの和を $\mathbf{q}_1 \mathbf{+} \mathbf{q}_2$ で表すとしよう。(「$\mathbf{+}$」は太字の＋)

Q の要素に対しては，数 (系) N (例えば分数) の要素の倍作用が考えられている。
Q の要素 $\mathbf{q}$ と N の要素 n に対し，$\mathbf{q}$ の n 倍を $\mathbf{q}_{\times}\, n$ で表すとしよう。(「${}_{\times}$」は下付の ×)

N の要素２つに対しては，和と積が考えられている。
N の要素 n_1 と n_2 に対し，これの和と積をそれぞれ $n_1 + n_2$，$n_1 \times n_2$ で表す。

数の＋と×は，つぎの関係で条件付けられている (すなわち，これが＋と×の定義)：

$$\mathbf{q}_{\times}\, n_1 \mathbf{+} \mathbf{q}_{\times}\, n_2 = \mathbf{q}_{\times} (n_1 + n_2)$$
$$(\mathbf{q}_{\times}\, n_1)_{\times}\, n_2 = \mathbf{q}_{\times} (n_1 \times n_2)$$

そして，これらの意味をすべて込めて，この構造をつぎのように表すとしよう：

$$((Q, \mathbf{+}), {}_{\times}, (N, + , \times))$$

これが，量の代数的構造である。

5.2　＜量としての数＞——量の普遍対象

量 (系) Q は, 構成要素の数 (系) N によって, 構造が定まる。すなわち, 構成要素にしている数 (系) が同じである量 (系) は, 構造が同じ (同型) である。
例えば, 長さ, 重さに対する数の倍を分数倍で考えているとき, 長さ (系) と重さ (系) は同型である。
長さに対する数の倍を自然数倍で考え，重さに対する数の倍を分数倍で考えているとき，長さ (系) と重さ (系) は同型でない。

量 (系) Q の構造が構成要素の数 (系) N によって定まるのは，どのようなしくみによるのか。
数 (系) N の構造を組み替えて，量 (系) をつくることができる。すなわち＜量としての数＞がつくられる。そして，Q はこの＜量としての数＞と同型になっている。

これが，＜量としての数＞の概要である。
以下，この内容をより明示的に述べる。

(1) **＜量としての数＞**

数 (系) $(N, + , \times)$ を素材にして，

$$((N, +), \times, (N, + , \times))$$

をつくる。
これは，量の構造をもつものになる——すなわち，量になる：

・$(N, +)$ の要素が，「量としての数」

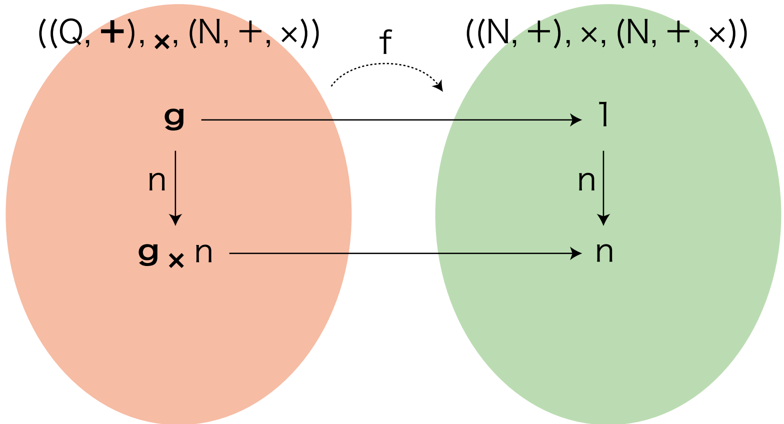
・(N, ＋, ×) の要素が，「量としての数」の倍作用素
　――すなわち「量の比」

(2) **＜量としての数＞は，量の普遍対象**

g を，量 Q の零でない要素とする。Q の要素と数の対応：

$$f : \mathbf{g}_{\times}\, n \longmapsto n \quad (\mathbf{g} \in Q,\ \ n \in N)$$

は，((Q, **＋**), ×, (N, ＋, ×)) と ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の間の同型対応になる。



すなわち，((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は，N の要素を倍の作用素として考えるすべての量 ((Q, **＋**), ×, (N, ＋, ×)) にとって，この量の構造を示すものになっている。
このことは，数学の「普遍対象 *(universal object)*」のことばを用いて，つぎのように表現される：

　((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は，(N, ＋, ×) の要素を倍の作用素として考える量の普遍対象。

「普遍対象」は，いわば，イデア論の「イデア」である。
((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) は ＜N を作用域とする量＞のイデアであり，
イデア ((N, ＋), ×, (N, ＋, ×)) の降りてきたものが ＜N を作用域とする量＞である。
――実際，数学で自体的に存在するのは，数であって，量ではない。

註：線型空間論で「体 K 上の n 次元線型空間 E」を少し進んだところで，
　「K からの線型空間 K^n の導出」
　「線型空間 E と K^n の同型」
の話が出てくるが，これが，いま論じている「1 と見る」「量の普遍対象」の数学と対応している。
ただし，<u>「線型空間」と「量」は同じではない</u>：

・自然数 (ℕ, ＋, ×) に対する量 ((ℕ, ＋), ×, (ℕ, ＋, ×)) は，線型空間ではない。
・スカラが実数の 2 次元実線型空間 (($\mathbb{R}^2$, **＋**), ×, (ℝ, ＋, ×)) は量ではないが，複素数をスカラとしたときの 1 次元の線型空間 (($\mathbb{R}^2$, **＋**), ×, (ℂ, ＋, ×)) は，((ℂ, ＋), ×, (ℂ, ＋, ×)) と同型なので，量である。

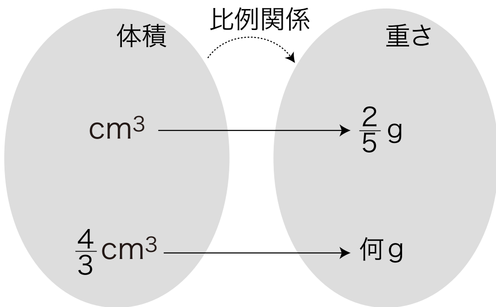
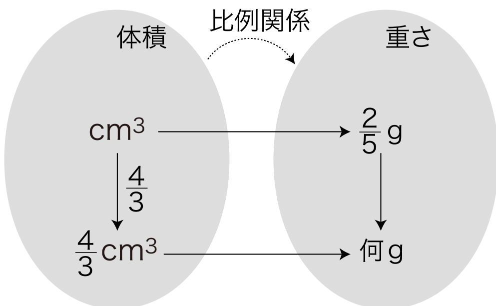
(→ 『「数とは何か？」への答え』)

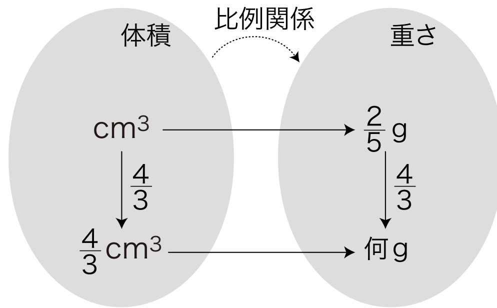
6.「比例関係」の数学

6.1「比例関係の文章題を解く」の推論

比例関係の文章題を解くとは，与えられた問題を数の積の式にまで還元し，その式の値を計算で求めることである。そして，この全プロセスを推論として行うわけである。

以下が，積の式への還元までの推論である：

問 題	「1cm^3 が 2/5 g だと，4/3 cm^3 は何 g ？」 
「4/3 cm^3 」の分析	

比例関係の適用	
問題の還元	「2/5 g の 4/3 倍は何 g」 $\frac{2}{5}\text{ g} \xrightarrow{\frac{4}{3}} \text{何 g}$
「2/5 g」「何 g」の分析	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\frac{2}{5}"] \arrow[rr, bend right, "\text{何}"'] & \frac{2}{5}\text{ g} \arrow[r, "\frac{4}{3}"] & \text{何 g} \end{tikzcd}$
「×」の文法	$\begin{tikzcd} \text{g} \arrow[r, "\frac{2}{5}"] \arrow[rr, bend right, "\text{何} = \frac{2}{5}\times\frac{4}{3}"'] & \frac{2}{5}\text{ g} \arrow[r, "\frac{4}{3}"] & \text{何 g} \end{tikzcd}$
問題の還元	「何 = 2/5× 4/3」

6.2　比例関係は，量になる

速度は，時間と距離の間の比例関係である。
一方，速度は，量として足したり倍したりできる——実際，日常的にそうしている。

一般に，比例関係は量になる。
例として，体積と重さの間の比例関係を考える。

「比例関係」は, 数学では,「量の構造に関する準同型」ということになる。
体積 (系)，重さ (系) を，$((Q_{体積}, \boldsymbol{+}), \boldsymbol{\times}, (N, +, \times))$，$((Q_{重さ}, \boldsymbol{+}), \boldsymbol{\times}, (N, +, \times))$ とする。
体積と重さの間の比例関係 (準同型) 全体の集合を，数学の表記法にならって，$\mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ})$ で表す。
この集合から，量 $((\mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ}), \boldsymbol{+}), \boldsymbol{\times}, (N, +, \times))$ が導かれる。すなわち，$\boldsymbol{+}$ と $\boldsymbol{\times}$ を，つぎのように定義する：

　$f, g \in \mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ})$ に対し,

　　$(f \boldsymbol{+} g)(x) = f(x) \boldsymbol{+} g(x) \quad (x \in Q_{体積})$

　$f \in \mathrm{Hom}(Q_{体積}, Q_{重さ})$，$n \in N$ に対し,

　　$(f \boldsymbol{\times} n)(x) = f(x) \boldsymbol{\times} n \quad (x \in Q_{体積})$

比例関係は，何でも量になる。
例えば，面積と人数の比例関係で考えた「混み具合」は，量になる：

　「一客車に 20 人」と「一客車に 30 人」を合わせた混み具合は ,「一客車に (20 + 30) 人」：

$$
\begin{aligned}
& (\,20\ 人 / 客車 + 30\ 人 / 客車\,)\,(\,客車\,) \\
=\ & (20\ 人 / 客車\,)\,(\,客車\,) + (30\ 人 / 客車\,)\,(\,客車\,) \\
=\ & 20\ 人 + 30\ 人 \\
=\ & (20 + 30)\ 人
\end{aligned}
$$

「一客車に 20 人」の 3 倍の混み具合は ,「一客車に (20 × 3) 人」:

$$
\begin{aligned}
& (\,(20\ 人 / 客車\,) \times 3\,)\,(\,客車\,) \\
=\ & (\,(20\ 人 / 客車\,)\,(\,客車\,)\,) \times 3 \\
=\ & 20\ 人 \times 3 \\
=\ & (20 \times 3)\ 人
\end{aligned}
$$

おわりに

「分数・小数のかけ算・わり算」の指導は難しい。
「難しい」の内容は,《説明を明証的につくれない》である。

明証的につくれないのは,「教育的事情」がいちばんの理由になる。
すなわち,教育の惰性の力であり,これは個々の取り組みではいかんともし難い。

そしてもう一つの大きな理由が,明証性・非明証性のとらえが,そもそもきちんとできていないことである。

先ず,「明証性の問題が存在している」の意識が,形成されない。
形成されないのは,「学習内容は,疑問を差し挟むものではない」の無意識があり,「学習困難は個人の能力の問題である」の思考回路になっているからである。

さらに「明証性の問題が存在している」の意識をもたせるものは数学の知識であるが,この数学がもたれていない。
もたれていないのは,「明証性・非明証性のとらえに必要な数学」の文脈でその数学に出会う / 教えられる機会がもたれなかったからである。

そこで,本テクストを以て,「分数・小数のかけ算・わり算」の現行指導をとらえる上で必要になる数学を示した。

本テクストは,数学しか示していない。

この数学が,「明証性・非明証性のとらえ」でどのように登場することになるかは,各論として,別のテクストで述べるようにした。
以下が,現時点での,各論のテクストとなるものである：

『「数直線でかけ算・わり算」は,わかるのがおかしい』
『「分数のかけ算・わり算」がペンキを塗る話になるわけ』

註：本論考は，つぎのサイトで継続される (これの進行に応じて本書を適宜更新する)：

学校数学の「かけ算・わり算」のとらえには，数学が必要

宮 下 英 明（みやした ひであき）
1949 年，北海道生まれ。東京教育大学理学部数学科卒業。筑波大学博士課程数学研究科単位取得満期退学。理学修士。金沢大学教育学部助教授を経て，現在，北海道教育大学教育学部教授。数学教育が専門。

「数」の数学と学校数学 (3)

学校数学の「かけ算･わり算」のとらえには，数学が必要

2012-04-13 『「分数のかけ算・わり算」の学校数学と数学』『「数直線でかけ算･わり算」は, わかるのがおかしい』の一部を分離して，本テクストに

著者・サーバ運営者　宮下英明

サーバ　m-ac.jp
http://m-ac.jp/
m@m-ac.jp